Contrôle Optimal Stochastique et Applications en Finance

Huyên PHAM

Université Paris 7
Laboratoire de Probabilités et
Modèles aléatoires, CNRS UMR 7599
pham@math.jussieu.fr

Version : 2002-2003.

DEA Paris 6, Probabilités et Applications
DEA Paris 7, Statistique et Modèles Aléatoires en Economie et Finance

Table des matières

Préface

Les problèmes d'optimisation dynamique stochastique ont de nombreuses applications dans des problèmes de gestion, d'économie et de finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique.

L'objectif de ce cours est d'étudier les problèmes de contrôle de diffusion avec plusieurs applications en économie et finance.

On étudie d'abord les problèmes d'arrêt optimaux dans lesquels la variable de décision est un temps d'arrêt. On étudie ensuite les problèmes de contrôle stochastique dans lesquels la variable de contrôle agit sur l'état du système. Ces problèmes d'optimisation stochastique sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution d'une inéquation ou équation aux dérivées partielles dite de Bellman. Cependant, il existe de nombreux cas où la fonction valeur n'est pas suffisamment régulière pour satisfaire l'équation de Bellman au sens classique. La notion de solutions de viscosité, introduite par Crandall et Lions, fournit un cadre particulièrement bien adapté à la théorie de l'optimisation dynamique stochastique.

Chapitre 1

Modèles d'optimisation stochastique. Exemples en économie et finance

On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. Nous considérons ici qu'il varie de façon continue. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description 'exhaustive' du système. Les variables d'état sont supposées réelles. On notera X_t l'état du système à l'instant t. Donc si les variables d'état sont en nombre n, $X_t \in \mathbb{R}^n$.

Une fois défini l'état, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \mapsto X_t$ décrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle. Une grande variété est possible. Nous nous intéressons ici au cas où l'état du système est gouverné par un processus de diffusion :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \tag{1.1}$$

où W est un mouvement brownien d-dimensionnel, $b(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma(x)$ est une matrice $n \times d$. Si $\sigma \equiv 0$, on a un modèle d'évolution déterministe pour X. Notons que pour X solution de l'équation différentielle stochastique (1.1), l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue pour presque tout ω ; on dit que le processus X est continu. Il est possible d'introduire des discontinuités en temps dans l'évolution du processus X en ajoutant une composante de saut dans l'équation (1.1). On obtient alors un processus de diffusion à sauts pour X. Cette modélisation est utile par exemple dans les problèmes d'assurance.

On suppose que l'on a accès à toute l'information du passé et du présent (mais bien sûr pas du futur) du système. L'information à la date t est mathématiquement définie en termes d'une σ-algèbre $\mathcal{F}_t$ telle que X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \leq t$. La famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$, et est en pratique la famille des σ-algèbres engendrés par le processus X lui-même ou encore la famille engendrée par le mouvement brownien.

Un premier type de problèmes d'optimisation concerne les cas où la variable de décision est un temps d'arrêt, c'est à dire une variable aléatoire positive τ telle que l'évènement $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ceci signifie qu'à toute date t, la décision de s'arrêter avant t, $\tau \leq t$, dépend seulement de l'information disponible jusqu'à cette date, $\mathcal{F}_t$, et pas du futur. Le critère (à maximiser pour fixer les idées) s'écrit sous la forme :

$$E\left[\int_0^\tau f(X_t)dt + g(X_\tau)\right].$$

A chaque date t, on peut décider d'arrêter le processus ce qui rapporte $g(X_t)$ ou bien de continuer en espérant que cela permette d'obtenir un gain plus élevé. L'objectif est de trouver le temps d'arrêt optimal qui assure le plus grand gain et de calculer le maximum de ce profit espéré.

Exemple 1 : quand vendre un actif ?
Soit une personne possédant un actif ou une ressource (maison, action, etc ...) qu'elle désire vendre. Le prix de cet actif évolue selon :

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Supposons qu'à la vente de l'actif, il y a un coût fixe de transaction $a > 0$. Ainsi, si la personne décide de vendre l'actif à la date t, le bénéfice net de cette vente sera : $e^{-\rho t}(X_t - a)$ où $\rho > 0$ est le facteur d'inflation. Le problème est alors de trouver un temps d'arrêt qui maximise le bénéfice net espéré :

$$\sup_\tau E\left[e^{-\rho\tau}(X_\tau - a)\right],$$

et de calculer le profit espéré.

Exemple 2 : quand investir dans un projet ?
On considère un agent qui souhaite investir dans un projet, par exemple dans une entreprise. A partir du moment où il investit, il recevra un flux de dividendes dont la valeur évolue selon :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Le coût de cet investissement est fixe égal à C. En investissant à la date t, le bénéfice net actualisé (sur le long-terme) est $\int_t^{+\infty} e^{-\rho s}X_s ds - e^{-\rho t}C$. Le problème est alors de trouver un temps d'arrêt qui maximise ce bénéfice espéré :

$$\sup_\tau E\left[\int_\tau^{+\infty} e^{-\rho t}X_t dt - e^{-\rho\tau}C\right].$$

Exemple 3 : Extraction de ressource naturelle
Le prix d'une unité de ressource naturelle (gaz, huile, etc...) évolue selon :

$$dP_t = \alpha P_t dt + \beta P_t dW_t.$$

La quantité de ressources restantes est notée par Q_t à la date t. En supposant que le taux d'extraction est proportionnel à la quantité restante, Q évolue selon :

$$dQ_t = -\lambda Q_t dt,$$

où $\lambda > 0$. Le coût par unité de temps d'extraction est $K > 0$. Si on arrête l'extraction au temps d'arrêt τ, le profit espéré est :

$$E\left[\int_0^\tau e^{-\rho t} - (P_t - K)dQ_t + e^{-\rho\tau} g(P_\tau, Q_\tau)\right],$$

où $\rho > 0$ est un facteur d'actualisation et $g(p,q)$ une fonction de gain donnant la valeur de la ressource restante q quand le prix vaut p. L'objectif est de maximiser ce profit espéré.

Nous considèrerons aussi des modèles dans lesquels l'évolution de l'état du système est influencée par un contrôle. Le contrôle est un processus $(\alpha_t)_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que α est $\mathcal{F}_t$-adapté, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A, sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose donc que les fonctions b et σ dans (1.1) dépendent du contrôle. L'équation d'évolution pour l'état du système devient alors :

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t. \tag{1.2}$$

Le critère (à minimiser pour fixer les idées) s'écrira sous la forme : en horizon fini $T < +\infty$,

$$E\left[\int_0^T f(X_t, \alpha_t)dt + g(X_T)\right],$$

et en horizon infini,

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t, \alpha_t)dt\right].$$

La fonction f est la fonction de coût intégral, g est le coût final et $\beta > 0$ est un coefficient d'actualisation. Les objectifs seront de déterminer les infima pour ces critères et les contrôles optimaux, s'ils existent, qui les réalisent. Notons que leur caractérisation explicite ne sera en général possible que dans des cas particuliers, le plus souvent pour $n = 1$. Dans le cas général, on aura recours à des méthodes numériques. On cherchera les contrôles optimaux sous forme feedback, c'est à dire comme fonction déterministe du temps et de l'état du système à cet instant : $\alpha_t = \tilde{\alpha}(t, X_t)$.

Exemple 4 : problème du choix de portefeuille de Merton (horizon fini)
On considère un marché financier à deux actifs, l'un sans risque représentant le compte d'épargne et l'un risqué, typiquement représenté par une action. Le processus de prix de l'actif sans risque évolue selon :

$$dS_t^0 \;=\; rS_t^0 dt,$$

et celui de l'actif risqué :

$$dS_t \;=\; \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Ici, r, μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$. Soit un investisseur ou agent qui investit dans ces deux actifs, avec une proportion de sa richesse α_t dans l'actif risqué et donc $1 - \alpha_t$ dans l'actif sans risque à la date t. Son processus de richesse évolue selon :

$$\begin{aligned} dX_t &= (1-\alpha_t)\frac{X_t}{S_t^0} dS_t^0 + \alpha_t \frac{X_t}{S_t} dS_t \\ &= (\alpha_t X_t \mu + (1-\alpha_t) X_t r) dt + \alpha_t X_t \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Le contrôle est le processus α à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse terminale à un horizon fini $T < +\infty$:

$$\sup_{\alpha} E\left[U(X_T)\right],$$

où $U(x)$ est une fonction d'utilité, par exemple $U(x) = x^p/p$, $0 < p < 1$.

Exemple 5 : problème du choix de consommation et portefeuille de Merton (horizon infini)
On considère le même modèle que dans l'exemple précédent avec en plus la possibilité pour l'agent de consommer une partie de sa richesse. Alors, son processus de richesse évolue selon :

$$dX_t \;=\; (\alpha_t X_t \mu + (1-\alpha_t) X_t r - c_t) dt + \alpha_t X_t \sigma dW_t,$$

où α_t est la proportion de richesse investie dans l'actif risqué et $c_t \geq 0$ est le taux de consommation. Le critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la consommation sur le long-terme :

$$\sup_{\alpha, c} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} u(c_t) dt\right],$$

où β est un facteur d'escompte psychologique et u une fonction d'utilité.

Exemple 6 : investissement irréversible
On considère une firme dont le profit dépend du capital Y_t et d'un paramètre stochastique Z_t qui peut être par exemple la demande et évoluant selon :

$$dZ_t = \mu(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dW_t.$$

On note $\Pi(y, z)$ cette fonction de profit. On suppose que le capital de la firme ne se déprécie pas et croit avec un taux $u_t \geq 0$:

$$dY_t = u_t dt.$$

C'est un modèle d'irréversibilité de l'expansion du capital de la firme. Le coût d'une augmentation unitaire du capital est une fonction $c(Y_t)$ du capital. Le problème d'optimisation de la firme est :

$$\sup_u E\left[\int_0^T \Pi(Y_t, Z_t) - c(Y_t)u_t dt\right].$$

Exemple 7 : coût de surréplication dans un modèle à volatilité incertaine
On considère le prix d'un actif financier dont la volatilité σ_t est inconnue et dont on sait à priori qu'elle est à valeurs dans un intervalle $[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$. La dynamique du prix de l'actif risqué sous une probabilité martingale est :

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t.$$

Etant donné une option de payoff $g(X_T)$, on veut calculer son coût de surréplication donné par :

$$\sup_\sigma E[g(X_T)].$$

Chapitre 2

Introduction aux problèmes d'arrêt optimaux

2.1 Formulation du problème

L'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = b(X_s)ds + \sigma(X_s)dW_s, \tag{2.1}$$

où $X_s \in \mathbb{R}^n$ et W est un d-mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$. Les fonctions $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ satisfont les conditions usuelles de croissance linéaire et de Lipschitz qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution à (2.1) étant donnée une condition initiale. On note par $\{X_s^x, s \geq 0\}$ la solution de (2.1) partant de x en $t = 0$. On note par $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts, c'est à dire l'ensemble des variables aléatoires positives telles que pour tout t, l'évènement $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On considère alors le problème :

$$v(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E\left[\int_0^\tau e^{-\rho s} f(X_s^x)ds + e^{-\rho\tau} g(X_\tau^x)\right], \tag{2.2}$$

où $\rho > 0$ est un facteur d'actualisation, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, avec g borné inférieurement. On adopte la convention que $e^{-\rho\tau} g(X_\tau^x)$ est égal à zéro aux points ω de Ω où $\tau(\omega) = +\infty$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\rho s}|f(X_s^x)|ds\right] < +\infty,$$

ce qui assure que le problème (2.2) est bien défini. L'objectif est de calculer cette fonction valeur v et de déterminer un temps d'arrêt optimal, c'est à dire un temps d'arrêt τ^* tel que :

$$v(x) = E\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} f(X_s^x)ds + e^{-\rho\tau^*} g(X_{\tau^*}^x)\right].$$

2.2 Programmation dynamique et inéquations variationnelles : une description formelle

Nous décrivons de manière formelle comment le principe de la programmation dynamique permet d'obtenir les relations que doit satisfaire la fonction valeur v.

A la date $t = 0$, l'état du système est $X_0 = x$. Soit $h > 0$. Supposons que l'on ne stoppe pas le processus sur $[0, h]$. On reçoit alors sur cette période le gain actualisé $\int_0^h e^{-\rho s} f(X_s^x) ds$ et l'état du système est X_h^x à la date h. A cet instant, on applique le programme d'optimisation et on reçoit donc $v(X_h^x)$ ce qui donne en actualisant à la date initiale $t = 0$, $e^{-\rho h} v(X_h^x)$. Ainsi, en ne stoppant pas le processus sur $[0, h]$, on obtient comme profit espéré la quantité :

$$E\left[\int_0^h e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + e^{-\rho h} v(X_h^x)\right].$$

Par définition de la fonction v qui est le profit espéré lorsqu'on maximise sur tous les temps d'arrêts, on a alors :

$$v(x) \quad \geq \quad E\left[\int_0^h e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + e^{-\rho h} v(X_h^x)\right]. \tag{2.3}$$

Pour $h > 0$ suffisamment petit, on obtient approximativement :

$$E\left[\int_0^h e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + (1 - \rho h) v(X_h^x) - v(x)\right] + o(h) \quad \leq \quad 0. \tag{2.4}$$

En supposant que $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et en appliquant la formule d'Itô entre 0 et h, on a :

$$v(X_h) \quad = \quad v(x) + \int_0^h \mathcal{L} v(X_s^x) ds + \int_0^h \nabla_x v(X_s^x)' \sigma(X_s^x) dW_s, \tag{2.5}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L} w \quad = \quad b(x).\nabla_x w + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(\sigma(x)\sigma'(x) D_x^2 w\right).$$

Ici, le signe $'$ dénote la transposition et le signe . le produit scalaire euclidien. En prenant l'espérance dans (2.5), on a :

$$E[v(X_h)] \quad = \quad v(x) + E\left[\int_0^h \mathcal{L} v(X_s^x) ds\right],$$

soit en substituant dans (2.4) et en divisant par h :

$$E\left[\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{L} v(X_s^x) ds - \rho v(X_h^x)\right] \quad \leq \quad 0.$$

En faisant tendre h vers zéro, on obtient :

$$\rho v(x) - \mathcal{L}v(x) - f(x) \quad \geq \quad 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

De plus, d'après la définition (2.2) de la fonction valeur v, on a (en prenant $\tau = 0$ dans le supremum sur $\mathcal{T}$) :

$$v(x) \quad \geq \quad g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Supposons maintenant qu'à la date $t = 0$, $v(x) > g(x)$. Soit τ^* le temps d'arrêt :

$$\tau^* \quad = \quad \inf\{s \geq 0 \ : v(X_s^x) = g(X_s^x)\}.$$

Alors sur l'intervalle de temps infinitésimal $[0, h \wedge \tau^*[$, on a $v(X_s^x) > g(X_s^x)$: Il n'est donc évidemment pas optimal de stopper le processus sur $[0, h \wedge \tau^*[$ puisqu'on recevrait alors à cet instant comme gain $g(X_s^x)$ alors qu'on peut faire mieux en obtenant $v(X_s^x)$ $> g(X_s^x)$. Ceci implique donc que l'on a égalité dans la relation (2.3) :

$$v(x) \quad = \quad E\left[\int_0^{h\wedge\tau^*} e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + e^{-\rho(h\wedge\tau^*)} v(X_{h\wedge\tau^*}^x)\right].$$

Par un raisonnement similaire au précédent (avec en plus une estimation de $P[\tau^* \leq h]$ en $O(h)$), en appliquant la formule d'Itô, on obtient en faisant tendre h vers zéro :

$$\rho v(x) - \mathcal{L}v(x) - f(x) \quad = \quad 0, \quad \text{dès que } v(x) > g(x). \tag{2.8}$$

Conclusion : En combinant les relations (2.6), (2.7) et (2.8), on voit que la fonction valeur v doit satisfaire l'inéquation variationnelle :

$$\min\left(\rho v - \mathcal{L}v - f, v - g\right) \quad = \quad 0. \tag{2.9}$$

Il est à noter que la fonction v n'est en général pas assez régulière C^2 et la formulation (2.9) doit être précisée dans un cadre fonctionnel plus large que le cadre classique des fonctions C^2, par exemple en utilisant la notion de solution de viscosité qu'on introduira plus tard.

On présente dans le paragraphe suivant une autre approche analytique pour caractériser la fonction v, qui permettra également de déterminer un temps d'arrêt optimal.

2.3 Temps d'arrêt optimal et problème à frontière libre : un théorème de vérification

Le raisonnement (heuristique) du paragraphe précédent indique que tant que $v(X_s^x)$ $> g(X_s^x)$, il n'est pas optimal de stopper le processus. Par contre, dès que $v(X_s^x) =$

$g(X_s^x)$, on peut obtenir comme gain $v(X_s^x)$ en arrêtant à cet instant. Ainsi, le temps d'arrêt :

$$\tau^* \quad = \quad \inf\{s \geq 0 \ : v(X_s^x) = g(X_s^x)\},$$

avec la convention que $\inf \emptyset = +\infty$, est optimal pour le problème (2.2). On introduit alors l'ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$D \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^n \ : v(x) > g(x)\},$$

qui est appelée région de continuation, puisque tant que le processus X_s^x est dans D, il n'est pas optimal de le stopper et qu'il vaut mieux continuer à le laisser évoluer librement. Le temps d'arrêt τ^* est le plus petit des temps d'arrêts optimaux et s'exprime donc aussi comme le premier temps de sortie de l'ouvert D :

$$\tau^* \quad = \quad \tau_D := \inf\{s \geq 0 \ : X_s^x \notin D\}.$$

Remarque 2.3.1 Supposons que $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et définissons l'ensemble :

$$U \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^n \ : \rho g(x) - \mathcal{L}g(x) - f(x) < 0\}.$$

Alors on a

$$U \quad \subset \quad D.$$

En effet, soit $x_0 \in U$. Si $x_0 \notin D$, alors $v(x_0) = g(x_0)$ et x_0 serait un point minimum de $v - g$. On aurait donc $\nabla v(x_0) = \nabla g(x_0)$, $D^2 v(x_0) \geq D^2 g(x_0)$. Ceci impliquerait $\rho v(x_0) - \mathcal{L}v(x_0) - f(x_0) \leq \rho g(x_0) - \mathcal{L}g(x_0) - f(x_0) < 0$, une contradiction avec le fait que $\rho v(x) - \mathcal{L}v(x) - f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, il n'est jamais optimal de stopper le processus avant qu'il ne sorte de U. Néanmoins, il y a des cas où $U \neq D$ de telle sorte qu'il soit optimal de continuer au delà de U avant de stopper le processus.

D'après (2.8), on a que v satisfait :

$$\rho v(x) - \mathcal{L}v(x) - f(x) \quad = \quad 0, \quad \forall x \in D. \tag{2.10}$$

De plus par définition de D, on a :

$$v(x) \quad = \quad g(x), \quad \forall x \in \partial D. \tag{2.11}$$

Lorsque le domaine D est connu, le problème (2.10)-(2.11) est un problème de Dirichlet et sous certaines hypothèses de régularité sur la frontière ∂D et d'ellipticité du coefficient de diffusion $\sigma(x)$, admet une solution régulière (voir Friedman 1975). Mais ici D

est bien sûr inconnu et on a besoin d'une condition supplémentaire sur la frontière ∂D pour identifier le domaine D et la fonction v. Cette condition dit que :

$$\nabla_x v(x) \quad = \quad \nabla_x g(x), \quad \forall x \in \partial D. \tag{2.12}$$

La relation (2.12) qui exprime la continuité de $\nabla_x v$ à travers la frontière ∂D illustre un principe général dans les problèmes d'arrêt optimaux connu sous le nom de "smooth fit". Voir par exemple, Shiryayev (1978), Jacka (1993). Nous dérivons cette condition dans le cas d'un processus unidimensionnel et pour simplifier, nous prenons $\rho = f \equiv 0$. Supposons aussi que la région de continuation est de la forme $D_c = \{x \in \mathbb{R} \ : x < c\}$. Posons alors :

$$J(x,c) \quad = \quad E\left[g(X^x_{\tau_{D_c}})\right],$$

où τ_{D_c} est le temps de sortie de D_c du processus X^x_s. On a donc

$$\begin{aligned} v(x) \quad &= \quad \sup_\tau E[g(X^x_\tau)] \ = \ \sup_{\tau_D} E[g(X^x_{\tau_D})] \\ &= \quad \sup_c E[g(X^x_{\tau_{D_c}})] \ = \ \sup_c J(x,c). \end{aligned}$$

Le point $x = c \in \partial D_c$ et on a $\tau_{D_c} = 0$, P_c p.s., d'où $J(c,c) = g(c)$. En supposant que J est dérivable, on a :

$$\frac{\partial J}{\partial x}(c,c) + \frac{\partial J}{\partial c}(c,c) \quad = \quad g'(c). \tag{2.13}$$

Supposons que le supremum dans v soit atteint : $v(x) = J(x, c^*(x))$. Alors on a par la condition du premier ordre, $\dfrac{\partial J}{\partial c}(x, c^*(x)) = 0$ et le théorème de l'enveloppe dit que :

$$v'(x) \quad = \quad \frac{\partial J}{\partial x}(x, c^*(x))$$

Soit $\bar{c}$ le point frontière de la région de continuation. Alors $v(\bar{c}) = g(\bar{c}) = J(\bar{c}, \bar{c})$ et donc $c^*(\bar{c}) = \bar{c}$. On a donc en remplaçant $c = \bar{c}$ dans (2.13) :

$$\frac{\partial J}{\partial x}(\bar{c}, \bar{c}) \quad = \quad g'(\bar{c})$$

soit

$$v'(\bar{c}) \quad = \quad g'(\bar{c})$$

qui est la condition de smooth-fit sur la frontière c^* de la région de continuation $D = D_{c^*}$.

Les relations (2.10)-(2.11)-(2.12) forment un problème à frontière libre que doit nécessairement satisfaire la fonction valeur du problème d'arrêt optimal (2.2). Nous montrons maintenant une réciproque à ce résultat, en établissant un théorème de vérification qui permettra de vérifier qu'un candidat pour la fonction valeur v est effectivement égal à v.

Théorème 2.3.1 *Supposons que l'on trouve un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, une fonction $w : \bar{D} \to \mathbb{R}$ satisfaisant : $w \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, w bornée sur D, $g \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus D)$, $w > g$ sur D, $\rho g - \mathcal{L}g - f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus D$, et tels que :*

(i) $\rho w(x) - \mathcal{L}w(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in D$

(ii) $w(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial D$

(iii) $\nabla_x w(x) = \nabla_x g(x), \quad \forall x \in \partial D.$

Alors en étendant la fonction w par $w(x) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$, on a :

$$w(x) \;=\; v(x) \;=\; \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E\left[\int_0^\tau e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + e^{-\rho\tau} g(X_\tau^x)\right],$$

et de plus le temps de sortie de l'ouvert D :

$$\tau_D \;=\; \inf\{s \geq 0 \;: X_s^x \notin D\}$$

est un temps d'arrêt optimal et D est une région de continuation.

Preuve. La fonction w est C^2 sur D. De plus sur $\mathbb{R}^n \setminus D$, $w = g \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus D)$. Donc la fonction $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^2 par morceaux. Les conditions (ii) et (iii) impliquent que la fonction w est différentiable à travers la frontière ∂D et donc $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$. En appliquant la formule d'Itô généralisée (voir Krylov Thm. 2.10), on a pour tout $\tau \in \mathcal{T}_T = \{\tau \in \mathcal{T} \;: \tau \leq T p.s.\}$:

$$\begin{aligned} e^{-\rho\tau} w(X_\tau^x) \;&=\; w(x) + \int_0^\tau e^{-\rho s}[-\rho w(X_s^x) + \mathcal{L}w(X_s^x)] ds \\ &\quad + \int_0^\tau e^{-\rho s} \nabla_x w(X_s^x)' \sigma(X_s^x) dW_s. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le temps d'arrêt : $\tau_n = \inf\{s \geq 0 \;: |\nabla_x w(X_s^x)'\sigma(X_s^x)| \geq n\}$. Alors l'intégrale stochastique $\int e^{-\rho s} \nabla_x w(X_s^x)' \sigma(X_s^x) dW_s$ arrêtée en τ_n est une martingale puisque son intégrand est bornée. On a donc en prenant l'espérance :

$$E[e^{-\rho\tau\wedge\tau_n} w(X_{\tau\wedge\tau_n}^x)] \;=\; w(x) + E\left[\int_0^{\tau\wedge\tau_n} e^{-\rho s}[-\rho w(X_s^x) + \mathcal{L}w(X_s^x)] ds\right]. \quad (2.14)$$

Or d'après la condition (i) et le fait que sur $\mathbb{R}^n \setminus D$, $w = g$ avec $\rho g - \mathcal{L}g - f \geq 0$, on a :

$$\rho w(x) - \mathcal{L}w(x) - f(x) \;\geq\; 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $w \geq g$, on en déduit d'après (2.14) :

$$w(x) \;\geq\; E\left[\int_0^{\tau\wedge\tau_n} e^{-\rho s} f(X_s^x) ds + e^{-\rho\tau\wedge\tau_n} g(X_{\tau\wedge\tau_n}^x)\right], \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_T.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée sur l'intégrale en f et le lemme de Fatou sur le terme en g, de sorte qu'en faisant tendre n puis T vers l'infini :

$$w(x) \quad \geq \quad E\left[\int_0^\tau e^{-\rho s} f(X_s^x)ds + e^{-\rho\tau} g(X_\tau^x)\right], \quad \forall \tau \in \mathcal{T},$$

et donc que $w \geq v$.

Par définition du temps de sortie τ_D, on a que pour tout $0 \leq s < \tau_D$, $X_s^x \in D$ et donc d'après (i) :

$$\rho w(X_s^x) - \mathcal{L}w(X_s^x) - f(X_s^x) \quad = \quad 0, \quad 0 \leq s < \tau_D.$$

La relation (2.14) pour $\tau = \tau_D$ devient alors :

$$w(x) \quad = \quad E\left[\int_0^{\tau_D \wedge T \wedge \tau_n} e^{-\rho s} f(X_s^x)ds + e^{-\rho \tau_D \wedge T \wedge \tau_n} w(X^x_{\tau_D \wedge T \wedge \tau_n})\right].$$

Comme w est bornée sur D, on peut appliquer le théorème de convergence dominée en faisant tendre n et T vers l'infini. On obtient alors en notant que $w(X^x_{\tau_D}) = g(X^x_{\tau_D})$ d'après la condition (ii) :

$$w(x) \quad = \quad E\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\rho s} f(X_s^x)ds + e^{-\rho\tau_D} g(X^x_{\tau_D})\right] \;\leq\; v(x).$$

Ceci prouve donc finalement que $w(x) = v(x)$ et que τ_D est un temps d'arrêt optimal avec D comme région de continuation. □

Remarque 2.3.2 Nous avons étudié des problèmes d'arrêts optimaux stationnaires, c'est à dire que les fonctions valeur ne dépendent pas du temps. On pourrait étudier de manière analogue des problèmes d'arrêts non stationnaires, typiquement des problèmes à horizon fini lorsque le temps d'arrêt est à valeurs dans un intervalle fini $[0, T]$.

2.4 Application : à quel moment vendre un actif ?

On reprend l'exemple 1 du chapitre 1. Le prix d'un actif évolue selon :

$$dX_t \quad = \quad rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \; X_0 = x \geq 0,$$

$r \geq 0$ est le taux d'intérêt du marché, $\sigma > 0$ est la volatilité de l'actif. A la vente de cet actif, on doit payer un coût fixe de transaction $a > 0$ et le bénéfice net de cette vente actualisée au taux d'inflation ρ est : $e^{-\rho t} g(X_t)$ où $g(z) = z - a$. On veut donc calculer $v(x) = \sup_\tau E_x\left[e^{-\rho\tau} g(X_\tau)\right]$ ainsi qu'un temps d'arrêt optimal si le supremum est atteint. Le générateur infinitésimal de la diffusion X est :

$$\mathcal{L}w(x) \quad = \quad rxw'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w''(x).$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
U &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \rho g(x) - \mathcal{L}g(x) < 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \ : (\rho - r)x < \rho a\} .
\end{aligned}
$$

On voit donc que si $r \geq \rho$, $\mathbb{R}_+ \subset U \subset D$. Or comme $X_t \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \geq 0$, ceci prouve d'après la remarque 2.3.1 qu'il n'est jamais optimal de stopper le processus, c'est à dire de vendre l'actif. Ceci est assez intuitif car si le taux d'intérêt du marché est supérieur au taux d'inflation, il est préférable de ne jamais vendre l'actif et de le laisser prendre de la valeur. On peut aussi dans ce cas calculer directement le profit espéré $v(x)$. En effet, puisque :

$$
X_\tau^x \quad = \quad x \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W_\tau\right), \quad \forall \tau \in \mathcal{T},
$$

on a :

$$
v(x) \quad = \quad x \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E\left[e^{(r-\rho)\tau} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W_\tau\right) - \frac{a}{x}e^{-\rho\tau}\right], \ x > 0. \tag{2.15}
$$

En notant que le processus $\{\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t), t \geq 0\}$ est une martingale (exponentielle), égale à 1 en $t = 0$, on a d'après le théorème d'arrêt des martingales :

$$
E\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W_\tau\right)\right] \quad = \quad 1, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_n, \tag{2.16}
$$

où $\mathcal{T}_n$ est l'ensemble des temps d'arrêts bornés par n, $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme de Fatou, ceci implique :

$$
\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W_\tau\right)\right] \quad = \quad 1. \tag{2.17}
$$

Si $r = \rho$, alors on a d'après (2.15) et (2.17), $v(x) \leq x$. D'autre part, on a aussi pour tout n :

$$
v(x) \quad \geq \quad xE\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}n + \sigma W_n\right) - \frac{a}{x}e^{-\rho n}\right] = x - ae^{-\rho n},
$$

qui tend vers x quand n tend vers l'infini. Donc $v(x) = x$, c'est à dire que le profit espéré est égal à la valeur initiale de l'actif. Si $r > \rho$, alors d'après (2.15) et (2.16), on a :

$$
v(x) \quad \geq \quad xe^{(r-\rho)n} - ae^{-\rho n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},
$$

et donc en faisant tendre n vers l'infini, $v(x) = +\infty$.

On considère le cas $r < \rho$. Intuitivement, il est raisonnable de penser que tant que le prix de l'actif est en dessous d'un certain seuil, il n'est pas optimal de le vendre. On peut donc chercher une région de continuation de la forme :

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+ \ : x < c\},$$

pour un certain c^*. On cherche un candidat (w, c) avec $w \in C^1([0, c]) \cap C^2([0, c))$, $w(x) > x - a$ pour $x < c$, $\rho g - \mathcal{L}g \geq 0$ pour $x \geq c$, solution du problème à frontière libre :

(i) $\rho w(x) - rxw'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w(x) = 0, \quad 0 \leq x < c$

(ii) $w(c) = c - a,$

(iii) $w'(c) = 1.$

On cherche w de la forme $w(x) = \lambda x^\gamma$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\gamma \geq 0$ (puisque v reste borné quand x tend vers 0). En injectant dans (i), on trouve :

$$\rho - r\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0,$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - r + \sqrt{(\frac{1}{2}\sigma^2 - r)^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

La condition (ii) donne :

$$\lambda = \frac{c - a}{c^\gamma},$$

d'où :

$$w(x) = (c - a)\left(\frac{x}{c}\right)^\gamma.$$

Finalement, la constante c est déterminée par la condition (iii) de smooth-fit : $(c-a)\gamma/c = 1$, d'où :

$$c = c^* = a\frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Remarquons que $r < \rho$ si et seulement si $\gamma > 1$ et donc $c > 0$. Vérifions que $w(x) > g(x) = x - a$ pour $x < c^*$. En effet, on a :

$$w(x) - (x - a) = c^*\left[(1 - \frac{a}{c^*})\left(\frac{x}{c^*}\right)^\gamma - \frac{x}{c^*} + \frac{a}{c^*}\right].$$

En remplaçant $a/c^* = (\gamma - 1)/\gamma$, on obtient :

$$w(x) - (x - a) = c^*\left[\frac{y^\gamma - 1}{\gamma} + 1 - y\right],$$

avec $y = x/c^* < 1$. On en déduit le résultat voulu en notant que la fonction $y \mapsto \frac{y^\gamma - 1}{\gamma} + 1 - y$ est décroissante sur $[0, 1]$ et vaut 0 en 1. On doit aussi vérifier que $\rho g - \mathcal{L}g \geq 0$ pour $x \geq c^*$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \rho g - \mathcal{L}g \;=\; \rho(x-a) - rx &= (\rho - r)x - \rho a \\ &\geq (\rho - r)c^* - \rho a, \quad \forall x \geq c^* \\ &= \frac{a}{\gamma - 1}(\rho - r\gamma), \quad \forall x \geq c^* \\ &= \frac{a}{2}\sigma^2\gamma \;\geq\; 0, \quad \forall x \geq c^*, \end{aligned}$$

car par définition de γ, $\rho - r\gamma = \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1)$.

On conclut donc qu'il est optimal de vendre l'actif à la première date où son prix atteint la valeur $c^* = a\gamma/(\gamma - 1)$. Le profit espéré sera alors :

$$v(x) \;=\; (c^* - a)\left(\frac{x}{c^*}\right)^\gamma \;=\; \left(\frac{\gamma - 1}{a}\right)^{\gamma - 1}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\gamma .$$

2.5 Références

Pour une première approche des problèmes d'arrêts optimaux :

- Bensoussan A. et J.L. Lions (1978) : Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod.
- Oksendal B. (1998) : Stochastic differential equations : an introduction with applications, 5th edition, Springer Verlag.

Pour un traitement plus théorique et approfondi :

- El Karoui N. (1981) : Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique, Lect. Notes in Math., 816, Springer Verlag.
- Jacka S. (1993) : "Local times, optimal stopping and semimartingales", Annals of Probability, 21, 329-339.
- Shiryayev A. (1978) : Optimal stopping rules, Springer Verlag.

Chapitre 3

Problèmes de contrôle stochastique

3.1 Formulation du problème

3.1.1 Notations et hypothèses

On considère un modèle de contrôle où l'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dX_s \quad = \quad b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)dW_s, \tag{3.1}$$

où $X_s \in \mathbb{R}^n$ et W est un d-mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Le processus de contrôle $\alpha = (\alpha_s)$ est $\mathbb{F}$-adapté et à valeurs dans A, sous espace fermé de $\mathbb{R}^m$. Les fonctions mesurables $b : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^{n\times d}$ satisfont une condition de croissance linéaire : $\exists\ C \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ a \in A$,

$$|b(x,a)| + |\sigma(x,a)| \quad \leq \quad C(1 + |x| + |a|). \tag{3.2}$$

On suppose aussi que b et σ vérifient une condition de Lipschitz uniforme en A : $\exists\ C \geq 0$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ a \in A$,

$$|b(x,a) - b(y,a)| + |\sigma(x,a) - \sigma(y,a)| \quad \leq \quad C|x - y|. \tag{3.3}$$

On choisit comme norme matricielle : $|\sigma| = (\mathrm{tr}(\sigma\sigma'))^{\frac{1}{2}}$.

Problème à horizon fini.
On fixe un horizon fini $0 < T < +\infty$. Pour $t \in [0, T]$, on note par $\mathcal{A}_t$ l'ensemble des processus de contrôle $\{\alpha_s,\ t \leq s \leq T\}$ $(\mathcal{F}_s)$-adapté, à valeurs dans A, et tel que :

$$E\left[\int_t^T |\alpha_s|^2 ds\right] \quad < \quad +\infty. \tag{3.4}$$

Les conditions (3.2)-(3.3) et (3.4) assurent pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_t$ et pour toute condition initiale $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, l'existence et l'unicité d'une solution forte à l'EDS (à coefficients aléatoires) (3.1) partant de x en $s = t$. On note alors par $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ cette solution qui est p.s. à trajectoires continues. On montrera dans le prochain paragraphe, que sous ces conditions sur b, σ et α :

$$E\left[\sup_{t\leq s\leq T} |X_s^{t,x}|^2\right] \quad < \quad +\infty. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.1 Tout processus de contrôle $\alpha \in \mathcal{A}_0$ peut être vu comme un processus dans $\mathcal{A}_t$, $0 \leq t \leq T$, en considérant sa restriction à l'intervalle $[t,T]$. Réciproquement, tout processus $\alpha \in \mathcal{A}_t$ peut être étendu en un processus $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}_0$ en posant $\tilde{\alpha}_s = a$ constante dans A, pour $0 \leq s < t$, et $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s$ pour $t \leq s \leq T$. Avec cette convention usuelle, on pourra donc identifier $\mathcal{A}_t$ à $\mathcal{A}_0$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

Soient $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose que

(Hg) (i) g est borné inférieurement

ou (ii) g est à croissance quadratique :

$$|g(x)| \;\leq\; C(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

pour une constante C indépendante de x.

Pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, on note par $\mathcal{A}(t,x)$ le sous-ensemble des contrôles α de $\mathcal{A}_t$ tel que :

$$E\left[\int_t^T \left|f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)\right| ds\right] \quad < \quad +\infty. \tag{3.6}$$

On peut alors définir sous **(Hg)** la fonction de coût :

$$J(t,x,\alpha) \quad = \quad E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + g(X_T^{t,x})\right],$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathcal{A}(t,x)$. L'objectif étant de minimiser cette fonction coût, on introduit la fonction valeur :

$$v(t,x) \quad = \quad \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} J(t,x,\alpha), \tag{3.7}$$

qu'on cherchera à calculer et si possible un contrôle $\alpha^* \in \mathcal{A}(t,x)$ tel que $v(t,x) = J(t,x,\alpha^*)$. α^* est appelé contrôle optimal. Si de plus le processus α^* peut s'exprimer comme fonction mesurable du temps et de l'état du système, $\alpha_s^* = \alpha^*(s, X_s^{t,x})$, $t \leq s \leq T$, on dit que α^* est un contrôle optimal Markovien pour (3.7).

Problème à horizon infini.
On note par $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des processus de contrôle $\{\alpha_s,\ s \geq 0\}$ $\mathbb{F}$-adapté, à valeurs dans A, et tel que :

$$E\left[\int_0^T |\alpha_s|^2 ds\right] \quad < \quad +\infty, \quad \forall T > 0. \tag{3.8}$$

Etant donné une condition initiale $t = 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, et un contrôle $\alpha \in \mathcal{A}_0$, il existe alors une unique solution forte, noté $\{X_s^x, s \geq 0\}$, de (3.1) partant de x en $t = 0$. Soit $\beta > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note par $\mathcal{A}(x)$ le sous-ensemble des contrôles α de $\mathcal{A}_0$ tel que :

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s}\,|f(X_s^x, \alpha_s)|\,ds\right] \quad < \quad +\infty. \tag{3.9}$$

On définit alors la fonction coût :

$$J(x, \alpha) \quad = \quad E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s) ds\right],$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathcal{A}(x)$, et la fonction valeur :

$$v(x) \quad = \quad \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(x)} J(x, \alpha). \tag{3.10}$$

L'objectif est de calculer $v(x)$ et si possible un contrôle $\alpha^* \in \mathcal{A}(x)$, appelé contrôle optimal, tel que $v(x) = J(x, \alpha^*)$. Si le processus α^* peut s'exprimer comme fonction mesurable du temps et de l'état du système, $\alpha_s^* = \alpha^*(s, X_s^x)$, $s \geq 0$, on dit que α^* est un contrôle optimal Markovien pour 3.10.

3.1.2 Quelques estimations sur le système contrôlé

Rappelons que les fonctions b et σ sont Lipschitz en x, uniformément en $a \in A$. Définissons alors la constante finie positive :

$$\beta_0 \quad = \quad \sup_{x \neq y, a \in A} \left\{ \frac{(b(x,a) - b(y,a))'(x - y) + \frac{1}{2}|\sigma(x,a) - \sigma(y,a)|^2}{|x - y|^2} \right\}.$$

On a les estimations suivantes sur l'état du système :

Lemme 3.1.1 *1) a) Pour tout $T > 0$, $0 \leq t \leq s \leq T$, $\alpha \in \mathcal{A}_t$, et $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$E\left[\left|X_s^{t,x}\right|^2\right] \quad \leq \quad Ce^{C(s-t)}\left(|x|^2 + E\left[\int_t^s 1 + |\alpha_u|^2 du\right]\right), \tag{3.11}$$

où C est une constante indépendante de t, s, T, x et α.

b) Pour tout $T > 0$, $t \in [0,T]$, $\alpha \in \mathcal{A}_t$, et $x \in \mathbb{R}^n$:

$$E\left[\sup_{s\in[t,T]} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right] \leq Ce^{C(T-t)^2}\left(|x|^2 + E\left[\int_t^T 1 + |\alpha_u|^2 du\right]\right), \tag{3.12}$$

où C est une constante indépendante de t, T, x et α.

2) Pour tout $T > 0$, $t \in [0,T[$, $h > 0$ assez petit, $\alpha \in \mathcal{A}_t$, et $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} & E\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x} - x\right|^2\right] \\ \leq \; & C\left[h\left(1 + E\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right]\right) + E\left[\int_t^{t+h} |\alpha_u|^2 du\right]\right], \end{aligned} \tag{3.13}$$

où C est une constante indépendante de t, T, h, x et α. En particulier, on a :

$$\lim_{h\to 0^+} E\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x} - x\right|^2\right] = 0. \tag{3.14}$$

3) Pour tout $0 \leq t \leq s$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}_t$,

$$E\left|X_s^{t,x} - X_s^{t,y}\right|^2 \leq e^{2\beta_0(s-t)}|x-y|^2. \tag{3.15}$$

Preuve. 1) a) Par la formule d'Itô, on a pour tout $0 \leq t \leq s$ et τ temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} \left|X_{s\wedge\tau}^{t,x}\right|^2 &= |x|^2 + \int_t^{s\wedge\tau} 2X_u^{t,x}.b(X_u^{t,x}, \alpha_u) + \mathrm{tr}(\sigma\sigma'(X_u^{t,x}, \alpha_u))du \\ &\quad + \int_t^{s\wedge\tau} 2(X_u^{t,x})'\sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)dW_u. \end{aligned} \tag{3.16}$$

On choisit $\tau = \tau_n := \inf\{u \geq t \; : |X_u^{t,x}||\sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)| \geq n\}$ qui tend p.s. vers l'infini quand n tend vers l'infini. On note alors que sur l'intervalle de temps $[t, s\wedge\tau_n]$, l'intégrand de l'intégrale stochastique dans (3.16) est borné, et ainsi cette intégrale s'annule en espérance. D'après la condition de croissance (3.2) sur b et σ, on obtient alors :

$$\begin{aligned} E\left[\left|X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}\right|^2\right] &= |x|^2 + E\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} 2X_u^{t,x}.b(X_u^{t,x}, \alpha_u) + |\sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)|^2 du\right] \\ &\leq C\left(|x|^2 + E\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} 1 + \left|X_u^{t,x}\right|^2 + |\alpha_u|^2 du\right]\right) \\ &\leq C\left(|x|^2 + E\left[\int_t^s 1 + |\alpha_u|^2 du\right] + \int_t^s E\left[\left|X_{u\wedge\tau_n}^{t,x}\right|^2\right] du\right). \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduit que :

$$E\left[\left|X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}\right|^2\right] \leq Ce^{C(s-t)}\left(|x|^2 + E\left[\int_t^s 1 + |\alpha_u|^2 du\right]\right).$$

On conclut par le lemme de Fatou en faisant tendre n vers l'infini.

b) D'après la dynamique de $X_s^{t,x}$, $t \leq s \leq T$, et par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{u\in[t,s]} \left|X_u^{t,x}\right|^2 &\leq 3|x|^2 + 3(s-t)\int_t^s \left|b(X_v^{t,x},\alpha_v)\right|^2 dv \\ &\quad +3 \sup_{u\in[t,s]} \left|\int_t^u \sigma(X_v^{t,x},\alpha_v)dW_v\right|^2. \end{aligned}$$

On en déduit par l'inégalité de Doob :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{u\in[t,s]} \left|X_u^{t,x}\right|^2\right] &\leq 3|x|^2 + 3(s-t)E\left[\int_t^s \left|b(X_u^{t,x},\alpha_u)\right|^2 du\right] \\ &\quad +12E\left[\int_t^s \left|\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u)\right|^2 du\right]. \end{aligned}$$

En posant $F(s) = E\left[\sup_{u\in[t,s]}\left|X_u^{t,x}\right|^2\right]$, on obtient par la condition de croissance (3.2) sur b et σ :

$$F(s) \leq C\left(|x|^2 + (T-t+1)E\left[\int_t^T 1+|\alpha_u|^2 du\right] + (T-t+1)\int_t^s F(u)du\right).$$

On conclut par le lemme de Gronwall.

2) D'après la dynamique de $X_s^{t,x}$ et par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x}-x\right|^2 &\leq 2h\int_t^{t+h} \left|b(X_u^{t,x},\alpha_u)\right|^2 du \\ &\quad +2 \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\int_t^s \sigma(X_u^{t,x},\alpha_u)dW_u\right|^2. \end{aligned}$$

On en déduit par l'inégalité de Doob :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x}-x\right|^2\right] &\leq 2hE\left(\int_t^{t+h} \left|b(X_u^{t,x},\alpha_u)\right|^2 du\right) \\ &\quad +8E\left(\int_t^{t+h} \left|\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u)\right|^2 du\right). \end{aligned}$$

On conclut par la croissance linéaire (3.2) sur b et σ.

3) Posons $Z_s = X_s^{t,x} - X_s^{t,y}$, $s \geq t$. Alors on a :

$$\begin{aligned} dZ_s &= \left(b(X_s^{t,x},\alpha_s) - b(X_s^{t,y},\alpha_s)\right)ds + \left(\sigma(X_s^{t,x},\alpha_s) - \sigma(X_s^{t,y},\alpha_s)\right)dW_s \\ Z_t &= x-y. \end{aligned}$$

Soit $\tau_n = \inf\{s \geq t \ : |X_s^{t,x} - X_s^{t,y}| \geq n\}$. Cette suite de temps d'arrêt (τ_n) tend p.s. vers l'infini quand n tend vers l'infini. Par la formule d'Itô, on obtient alors :

$$\begin{aligned} E|Z_{s\wedge\tau_n}|^2 &= |x-y|^2 + E\left\{\int_t^{s\wedge\tau_n} 2\left(b(X_u^{t,x},\alpha_u) - b(X_u^{t,y},\alpha_u)\right)' Z_u \right. \\ &\quad \left. + \left|\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u) - \sigma(X_u^{t,y},\alpha_u)\right|^2 du\right\}, \end{aligned}$$

après avoir noté que le terme d'intégrale stochastique s'annule en espérance puisque son intégrand est borné sur $[t, s\wedge\tau_n]$. Par définition de β_0, ceci implique :

$$\begin{aligned} E|Z_{s\wedge\tau_n}|^2 &\leq |x-y|^2 + 2\beta_0 \int_t^{s\wedge\tau_n} E|Z_u|^2 du \\ &\leq |x-y|^2 + 2\beta_0 \int_t^{s} E|Z_{u\wedge\tau_n}|^2 du. \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduit que :

$$E|Z_{s\wedge\tau_n}|^2 \leq e^{2\beta_0(s-t)}|x-y|^2,$$

et on conclut par le lemme de fatou en faisant tendre n vers l'infini. □

Remarque 3.1.2 Lorsque l'espace A des contrôles est borné, les estimations (3.12) et (3.13) montrent qu'on a :

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t} E\left[\sup_{s\in[t,T]} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right] \leq Ce^{C(T-t)^2}\left(|x|^2 + (T-t)\right), \tag{3.17}$$

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t} E\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x} - x\right|^2\right] \leq C\left(1+|x|^2\right)h, \tag{3.18}$$

où C est une constante indépendante de t, T, h et x.

Remarque 3.1.3 Dans le cas d'un problème à horizon fini, si f est à croissance quadratique, i.e. il existe une constante positive C telle que :

$$|f(t,x,a)| \leq C(1+|x|^2+|a|^2), \quad \forall (t,x,a) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times A, \tag{3.19}$$

alors l'estimation (3.11) montre que pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathcal{A}_t$:

$$E\left[\int_t^T \left|f(s,X_s^{t,x},\alpha_s)\right| ds\right] < +\infty.$$

Autrement dit, dans ce cas, $\mathcal{A}(t,x) = \mathcal{A}_t$ et contient en particulier les contrôles constants dans A.

Remarque 3.1.4 Dans le cas d'un problème à horizon infini, si f est à croissance quadratique, i.e. il existe une constante positive C telle que :

$$|f(x,a)| \quad \leq \quad C(1+|x|^2+|a|^2), \quad \forall (x,a) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times A, \tag{3.20}$$

alors l'estimation (3.11) montre que pour $\beta > 0$ assez grand, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$:

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s}\,|f(X_s^x,a)|\,ds\right] \quad < \quad +\infty.$$

Autrement dit, les contrôles constants dans A appartiennent à $\mathcal{A}(x)$.

3.2 Equation de la programmation dynamique : une description formelle

Dans cette section, nous décrivons formellement comment le principe de la programmation dynamique dû à Bellman permet de donner une caractérisation de la fonction valeur en termes d'équation aux dérivées partielles dite de Hamilton-Jacobi-Bellman, ainsi qu'un critère pour déterminer les contrôles optimaux. Les résultats mathématiques rigoureux seront donnés dans les sections suivantes.

On considère le cas d'un problème de contrôle à horizon fini. Soit $0 < h < T-t$. Supposons que nous exercions un contrôle α_s sur l'intervalle $[t,t+h]$. A l'instant $t+h$, l'état du système devient X_{t+h} et nous l'observons à la date $t+h$. Supposons que nous connaissions à partir de $t+h$ la politique optimale à appliquer, sachant qu'à l'instant $t+h$, l'état du système est X_{t+h}. Autrement dit, supposons connu le contrôle α_s^*, $t+h \leq s \leq T$, tel que :

$$\begin{aligned} v(t+h,X_{t+h}) &= J(t+h,X_{t+h},\alpha^*) \\ &= E\left[\int_{t+h}^T f(s,X_s,\alpha_s^*)ds + g(X_T)\middle| X_{t+h}\right]. \end{aligned}$$

Considérons le contrôle :

$$\tilde{\alpha}_s \quad = \quad \begin{cases} \alpha_s, & t \leq s \leq t+h \\ \alpha_s^* & t+h \leq s \leq T. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} J(t,x,\tilde{\alpha}) &= E\left[\int_t^{t+h} f(s,X_s,\alpha_s)ds + \int_{t+h}^T f(s,X_s,\alpha_s^*)ds + g(X_T)\middle| X_t = x\right] \\ &= E\left[\int_t^{t+h} f(s,X_s,\alpha_s)ds + E\left[\int_{t+h}^T f(s,X_s,\alpha_s^*)ds + g(X_T)\middle| X_{t+h}\right]\middle| X_t = x\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s, \alpha_s)ds + v(t+h, X_{t+h})\middle| X_t = x\right] \\
&= E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^x, \alpha_s)ds + v(t+h, X_{t+h}^x)\right], \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

par la loi des espérances conditionnelles itérées. Le principe d'optimalité de Bellman dit que si l'on choisit α_s sur $[t, t+h]$ de façon à minimiser l'expression $J(t, x, \tilde{\alpha})$, on obtient ainsi le contrôle $\tilde{\alpha}$ optimal. Ceci signifie que le contrôle optimal sur $[t, T]$ peut être décomposé en α_s^*, $s \in [t, t+h]$, et α_s^*, $s \in [t+h, T]$, cette dernière étant la politique optimale pour un problème démarrant en $t+h$ dans l'état $X_{t+h}^{t,x}$. On a donc d'après (3.21) :

$$
v(t, x) = \inf_{\alpha} E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right]. \qquad (3.22)
$$

Nous dérivons maintenant, de manière formelle, l'équation de la programmation dynamique obtenue à partir de (3.22). Considérons le contrôle constant $\alpha_s = a \in A$ sur $[t, t+h]$. Alors d'après (3.22), on a :

$$
v(t, x) \leq E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, a)ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right]. \qquad (3.23)
$$

En supposant que $v \in C^{1,2}([0, T[, \mathbb{R}^n)$, on a par la formule d'Itô entre t et $t+h$:

$$
\begin{aligned}
v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) &= v(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^a v\right)(s, X_s^{t,x})ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} \nabla_x v(s, X_s^{t,x})' \sigma(X_s^{t,x}, a)dW_s,
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{L}^a$ est l'opérateur défini par :

$$
\mathcal{L}^a w = b(x, a).\nabla_x w + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x, a)\sigma'(x, a)D_x^2 w\right).
$$

En prenant l'espérance, on a :

$$
E\left[v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right] = v(t, x) + E\left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^a v\right)(s, X_s^{t,x})ds\right],
$$

d'où en substituant dans (3.23) :

$$
0 \leq E\left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^a v\right)(s, X_s^{t,x}) + f(s, X_s^{t,x}, a)ds\right].
$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$
0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}^a v(t, x) + f(t, x, a).
$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a alors :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a)\right] \leq 0. \tag{3.24}$$

D'autre part, supposons que α^* est un contrôle optimal. Alors dans (3.22), on a :

$$v(t,x) = E\left[\int_t^{t+h} f(s,X_s^*,\alpha_s^*)ds + v(t+h,X_{t+h}^*)\right],$$

où X^* est l'état du système solution de (2.1) partant de x en t avec le contrôle α^*. Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur v, on obtient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{\alpha_t^*} v(t,x) - f(t,x,\alpha_t^*) = 0, \tag{3.25}$$

ce qui combiné avec (3.24) prouve que v satisfait :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a)\right] = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.26}$$

On réecrit souvent cette EDP sous la forme :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{3.27}$$

où pour $(t,x,p,M) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}_n$ ($\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ symétriques) :

$$H_1(t,x,p,M) = \sup_{a\in A}\left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma\sigma'(x,a)M\right) - f(t,x,a)\right].$$

Cette fonction H_1 est appelée Hamiltonien du problème de contrôle considéré. Cette équation (3.27) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale :

$$v(T,x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.28}$$

qui résulte immédiatement de la définition (3.7) de la fonction valeur v.

Remarque 3.2.5 1) Lorsque l'ensemble des contrôles est réduit à un singleton, c'est à dire qu'il n'y a pas de contrôle sur l'état du système, l'EDP d'HJB se réduit à une EDP linéaire :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - b(x,a).\nabla_x v - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)D_x^2 v\right) &= f(t,x,a), \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n \\ v(T,x) &= g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.29}$$

correspondant à la fonction valeur :

$$v(t,x) = E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x},a)ds + g(X_T^{t,x})\right].$$

C'est la représentation de Feynman-Kac du problème de Cauchy (3.29).

2) L'argument d'optimalité de la programmation dynamique suggère que si l'on peut trouver un contrôle $\alpha^*(t,x)$ tel que :

$$\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(x,a)\right] \quad = \quad -\mathcal{L}^{\alpha^*(t,x)} v(t,x) - f(x,\alpha^*(t,x)),$$

c'est à dire que

$$\alpha^*(t,x) \quad \in \quad \arg\min_{a\in A}\left[\mathcal{L}^a v(t,x) + f(x,a)\right],$$

alors on aura :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{L}^{\alpha^*(t,x)} v(t,x) - f(x,\alpha^*(t,x)) \quad = \quad 0,$$

et donc

$$v(t,x) \quad = \quad E\left[\int_t^T f(X_s^*,\alpha^*(s,X_s^*))ds + g(X_T^*)\right],$$

où X^* est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} dX_s^* &= b(X_s^*,\alpha^*(s,X_s^*)) + \sigma(X_s^*,\alpha^*(s,X_s^*))dW_s, \quad t \le s \le T \\ X_t^* &= x, \end{aligned}$$

et α^* est un contrôle optimal Markovien.

Dans le cas d'un problème à horizon infini, le principe d'optimalité de Bellman dit que pour tout $h > 0$:

$$v(x) \quad = \quad \inf_{\alpha} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^x,\alpha_s)ds + e^{-\beta h} v(X_h^x)\right].$$

Par un argument similaire au cas du problème à horizon fini (en appliquant Itô à $e^{-\beta t}v(X_t^x)$), l'équation de la programmation dynamique devient :

$$\beta v(x) + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)\right] \quad = \quad 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

qu'on réecrit aussi sous la forme :

$$\beta v + H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)) \quad = \quad 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où pour $(x,p,M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$:

$$H_1(t,x,p,M) \quad = \quad \sup_{a\in A}\left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma\sigma'(x,a)M\right) - f(x,a)\right].$$

Cette fonction H_2 est appelée Hamiltonien du problème de contrôle considéré. Ceci suggère aussi qu'un contrôle optimal Markovien est obtenu avec :

$$\alpha^*(x) \quad \in \quad \arg\min_{a\in A}\left[\mathcal{L}^a v(x) + f(x,a)\right].$$

Conclusions : 1) horizon fini :

$$v(t,x) \quad = \quad \inf_\alpha E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right], \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

Alors v doit 'résoudre' :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a)\right] &= 0, \quad (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n \\ v(T,x) &= g(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}^a v \quad = \quad b(x,a).\nabla_x v b(x,a) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)D_x^2 v\right).$$

De plus si pour tout (t,x), $\alpha^*(t,x)$ est un point de maximum sur A de

$$\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a)\right] \quad = \quad H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x))$$

ou de manière équivalente un point de minimum de

$$\inf_{a\in A}\left[\mathcal{L}^a v(t,x) + f(x,a)\right],$$

alors $\{\alpha^*(s,X_s^*), t\le s\le T\}$ est un contôle optimal Markovien, où :

$$\begin{aligned} dX_s^* &= b(X_s^*, \alpha^*(s,X_s^*)) + \sigma(X_s^*, \alpha^*(s,X_s^*))dW_s, \quad t\le s\le T \\ X_t^* &= x. \end{aligned}$$

2) horizon infini :

$$v(x) \quad = \quad \inf_\alpha E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t^x, \alpha_t)dt\right], \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Alors v doit 'résoudre' :

$$\beta v(x) + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)\right] \quad = \quad 0, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

De plus si pour tout x, $\alpha^*(x)$ est un point de maximum sur A de

$$\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)\right] \quad = \quad H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x))$$

alors $\{\alpha^*(X_t^*), 0 \leq t \leq T\}$ est un contôle optimal Markovien, où :

$$\begin{aligned} dX_t^* &= b(X_t^*, \alpha^*(X_t^*)) + \sigma(X_t^*, \alpha^*(X_t^*))dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0^* &= x. \end{aligned}$$

3) Les arguments (heuristiques précédents) supposent que l'on puisse trouver un élément maximum dans A de l'Hamiltonien du problème de contrôle considéré. Ce n'est pas toujours possible lorsque A n'est pas compact : on dit dans ce cas qu'on a un problème de contrôle stochastique singulier.

3.3 Principe de la programmation dynamique et équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Passons maintenant à la dérivation rigoureuse de l'équation de Bellman. Un des résultats fondamentaux en théorie du contrôle stochastique est le principe de la programmation dynamique dont nous avons donné une description formelle ci-dessus. On renvoie à Fleming et Soner (1993, Section IV.7) pour le détail de la preuve rigoureuse (et technique) qui fait appel à des arguments délicats de sélection mesurable. On note par $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[0, +\infty[$ et par $\mathcal{T}_{t,T}$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[t, T]$.

Théorème 3.3.1 *(Principe de la programmation dynamique)*
1) Horizon fini : Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.
(i1) Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$ *et* $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$v(t, x) \leq E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{3.30}$$

(ii1) Pour tout $\delta > 0$, *il existe* $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$ *tel que pour tout* $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$v(t, x) + \delta \geq E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{3.31}$$

2) Horizon infini : Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
(i2) Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ *et* $\theta \in \mathcal{T}$:

$$v(x) \leq E\left[\int_0^\theta e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s)ds + e^{-\beta\theta} v(X_\theta^x)\right]. \tag{3.32}$$

(ii2) Pour tout $\delta > 0$, *il existe* $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ *tel que pour tout* $\theta \in \mathcal{T}$:

$$v(x) + \delta \geq E\left[\int_0^\theta e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s)ds + e^{-\beta\theta} v(X_\theta^x)\right]. \tag{3.33}$$

Pour tout $a \in A$, on considère l'opérateur linéaire du second ordre :

$$\mathcal{L}^a \varphi \quad = \quad b(x,a).\nabla_x \phi + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)D_x^2\varphi\right).$$

Grâce à la première partie du principe de la programmation dynamique, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.1 *1) Horizon fini : Supposons que la fonction valeur $v \in C^{1,2}([0,T[,\mathbb{R}^n)$, que la fonction f soit à croissance quadratique (3.19) et que $f(.,.,a)$ soit continue en (t,x) pour tout $a \in A$. Alors v est une sous-solution de l'équation d' Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a \in A}\left[-\mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a)\right] \quad \leq \quad 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n. \tag{3.34}$$

2) Horizon infini : Supposons que la fonction valeur $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, que la fonction f soit à croissance quadratique (3.20) et que $f(.,a)$ soit continue en x pour tout $a \in A$. Alors pour $\beta > 0$ assez grand, v est une sous-solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\beta v(x) + \sup_{a \in A}\left[-\mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)\right] \quad \leq \quad 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.35}$$

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'un horizon infini. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$, α le contrôle constant égal à a qui est bien dans $\mathcal{A}(x)$ pour $\beta > 0$ assez grand (indépendant de x et a) d'après la remarque 3.1.4. On note aussi X_s^x le processus d'état contrôlé associé. Soit τ le temps d'arrêt : $\tau = \inf\{s \geq 0 \;\; : |X_s^x - x| \geq \eta\}$ où $\eta > 0$ est une constante fixé. On applique la première partie (3.32) du principe de la programmation dynamique à $\tau \wedge h$ pour $h > 0$:

$$v(x) \quad \leq \quad E\left[\int_0^{\tau\wedge h} e^{-\beta s} f(X_s^x, a)ds + e^{-\beta(\tau\wedge h)} v(X_{\tau\wedge h}^x)\right].$$

Puisque $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer la formule d'Itô à $e^{-\beta s}v(X_s^x)$ entre $s = 0$ et $s = \tau \wedge h$, et en déduire que :

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & E\left[\int_0^{\tau\wedge h} e^{-\beta s}\left(-\beta v + \mathcal{L}^a v + f\right)(X_s^x, a)ds\right] \\ & + E\left[\int_0^{\tau\wedge h} e^{-\beta s} \nabla_x v(X_s^x)'\sigma(X_s^x, a)dW_s\right]. \end{aligned}$$

On remarque que l'intégrand de l'intégrale stochastique en dW est borné sur $[0, \tau \wedge h]$ et donc l'espérance du second terme à droite de l'inégalité précédente s'annule. On obtient alors :

$$E\left[\frac{1}{h}\int_0^{\tau\wedge h} L(s, X_s^x, a)ds\right] \quad \leq \quad 0, \tag{3.36}$$

où

$$L(t,x,a) \quad = \quad e^{-\beta t}(\beta v(x) - \mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)).$$

Par continuité p.s. de la trajectoire X_s^x, on a que pour h suffisamment petit ($h \leq \bar{h}(\omega)$), $\tau(\omega) \wedge h = h$, p.s. Par continuité de la fonction $L(.,.,a)$, on en déduit par le théorème de la moyenne que la variable aléatoire sous le signe espérance de (3.36) converge p.s. vers $\beta v(x) - \mathcal{L}^a v(x) - f(x,a)$ quand h tend vers zéro. De plus, cette variable aléatoire est bornée par une constante indépendante de h. Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors :

$$\beta v(x) - \mathcal{L}^a v(x) - f(x,a) \quad \leq \quad 0,$$

et on conclut puisque $a \in A$ est arbitraire. □

Pour obtenir l'inégalité inverse de sursolution de l'équation de Bellman, on va utiliser la deuxième partie du principe de la programmation dynamique. On considère les Hamiltoniens $H_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $H_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ associées aux problèmes de contrôle stochastique en horizon fini et infini, et définies par :

$$\begin{aligned}
H_1(t,x,p,M) &= \sup_{a \in A} \left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(t,x,a) \right], \\
H_2(x,p,M) &= \sup_{a \in A} \left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(x,a) \right]
\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensembles des matrices symétriques $n \times n$. On note

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(H_1) &= \{(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \ : H_1(t,x,p,M) < +\infty\} \\
\mathrm{dom}(H_2) &= \{(x,p,M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \ : H_2(x,p,M) < +\infty\}.
\end{aligned}$$

Suivant le problème à horizon fini ou infini, on fera l'hypothèse suivante :

$$\begin{gathered}
H_1 \text{ est continue sur } \mathrm{int}(\mathrm{dom}(H_1)) \\
\text{et il existe } G_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \text{ continue telle que } : \\
(t,x,p,M) \in \mathrm{dom}(H_1) \iff G_1(t,x,p,M) \leq 0
\end{gathered} \tag{3.37}$$

$$\begin{gathered}
H_2 \text{ est continue sur } \mathrm{int}(\mathrm{dom}(H_2)) \\
\text{et il existe } G_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \text{ continue telle que } : \\
(x,p,M) \in \mathrm{dom}(H_2) \iff G_2(x,p,M) \leq 0
\end{gathered} \tag{3.38}$$

Proposition 3.3.2 *1) Horizon fini : Supposons que* (3.37) *soit vérifiée et que la fonction valeur* $v \in C^{1,2}([0,T[, \mathbb{R}^n)$*. Alors* v *est une sursolution de l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman, i.e. :*

$$\begin{aligned} & \max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)\right\} \\ \geq & \ 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$*.*
2) Horizon infini : Supposons que (3.38) *soit vérifiée et que la fonction valeur* $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$*. Alors* v *est une sursolution de l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman, i.e. :*

$$\max\left\{\beta v(x) + H_2(x, \nabla v(x), D^2 v(x)), G_2(x, \nabla v(x), D^2 v(x)\right\} \ \geq \ 0, \tag{3.40}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'un horizon fini. Soit $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$. On va prouver le résultat par l'absurde en supposant donc au contraire que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \ &< \ 0, \\ \text{et} \quad G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \ &< \ 0. \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction G_1, ceci implique que $(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(H_1))$. Par continuité de H_1 sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(H_1))$, il va alors exister $h > 0$ (qu'on peut prendre $< T - t$), $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(s,y) + H_1(s,y,\nabla_x v(s,y), D_x^2 v(s,y)) \ \leq \ -\varepsilon,$$

pour tout $s \in [t, t+h]$ et $y \in B(x,\eta)$. D'après la 2ème partie de la version forte de la programmation dynamique, il existe $\alpha^* \in \mathcal{A}(t,x)$, tel que pour tout $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$v(t,x) + \frac{\varepsilon h}{2} \ \geq \ E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s^*)ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right].$$

On choisit $\theta = \theta_h := \tau^* \wedge (t+h)$ où $\tau^* = \inf\{s \geq t \ : |X_s^{t,x} - x| \geq \eta\}$. Ici $X_s^{t,x}$ correspond à la diffusion contrôlée par α^*. Puisque $v \in C^{1,2}([0,T[, \mathbb{R}^n)$, on peut appliquer la formule d'Itô à $v(s, X_s^{t,x})$ entre $s = t$ et $s = \theta_h$ et en déduire :

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ \frac{\varepsilon h}{2} \ &+ \ E\left[\int_t^{\theta_h} L(x, X_s^{t,x}, \alpha_s^*)ds\right] \\ &- E\left[\int_t^{\theta_h} \nabla_x v(s, X_s^{t,x})' \sigma(X_s^{t,x}, \alpha_s^*) dW_s\right]. \end{aligned}$$

où

$$L(t,x,a) \quad = \quad -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^a v(t,x) - f(t,x,a).$$

On remarque que d'après la condition de croissance (3.2) sur σ, l'intégrand de l'intégrale stochastique en dW est borné sur $[0,\theta_h]$ par :

$$\left|\nabla_x v(s,X_s^{t,x})'\sigma(X_s^{t,x},\alpha_s^*)\right| \quad \leq \quad C_\eta(1+|\alpha_s^*|).$$

D'après la condition d'intégrabilité (3.4) sur $\alpha^* \in \mathcal{A}(t,x)$, on en déduit que l'espérance de l'intégrale stochastique en dW est nulle, d'où :

$$0 \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{h}E\left[\int_t^{\theta_h} L(s,X_s^{t,x},\alpha_s^*)ds\right]. \tag{3.41}$$

On note aussi que pour $t \leq s \leq \theta_h$:

$$\begin{aligned} L(s,X_s^{t,x},\alpha_s^*) \quad & \leq \quad -\frac{\partial v}{\partial t}(s,X_s^{t,x}) + H_1(s,X_s^{t,x},\nabla_x v(s,X_s^{t,x}),D_x^2 v(s,X_s^{t,x})) \\ & \leq \quad -\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit d'après (3.41) que

$$0 \quad \leq \quad \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h}E[\theta_h - t]\right). \tag{3.42}$$

D'après l'inégalité de Chebicheff et l'estimation (3.13) du lemme 3.1.1, on a :

$$\begin{aligned} P[\tau^* \leq t+h] \quad & \leq \quad P\left[\sup_{s\in[t,t+h]} |X_s^{t,x} - x| \geq \eta\right] \\ & \leq \quad \frac{E\left|\sup_{s\in[t,t+h]} |X_s^{t,x} - x|^2\right|}{\eta^2} \\ & \rightarrow \quad 0, \end{aligned}$$

quand h tend vers zéro. De plus, comme

$$P[\tau^* > t+h] \quad \leq \quad \tfrac{1}{h}E[\theta_h - t] \quad \leq \quad 1,$$

on en déduit que $\frac{1}{h}E[\theta_h - t]$ tend vers 1 quand h tend vers zéro. On obtient ainsi la contradiction voulue en faisant tendre h vers zéro dans (3.42). □

Remarque 3.3.6 La relation de sous-solution (3.34) (dans le cas horizon fini) de la fonction valeur s'écrit aussi :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x),D_x^2 v(t,x)) \quad \leq \quad 0,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$. Ceci implique que

$$G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x) \quad \leq \quad 0,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$, et donc que :

$$\max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)\right\} \quad \leq \quad 0,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$. On a une relation analogue dans le cas horizon infini.

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient le résultat principal de cette section.

Théorème 3.3.2 *Sous les conditions des propositions 3.3.1 et 3.3.2, la fonction valeur v est solution de l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*
1) Horizon fini :

$$\begin{aligned} &\max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)\right\} \\ &= \quad 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$.
2) Horizon infini :

$$\max\left\{\beta v(x) + H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)), G_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)\right\} \quad = \quad 0, \tag{3.44}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 3.3.7 **1.** Lorsque A est compact, l'Hamiltonien H_1 est fini sur tout le domaine $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}_n$ et le supremum est atteint. La condition (3.37) est satisfaite avec n'importe quel choix de fonction G_1 continue strictement négative. L'inéquation variationnelle de Bellman que doit satifaire la fonction valeur devient dans ce cas simplement l'équation de Bellman :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \quad = \quad 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.45}$$

2. Lorsque A n'est pas compact et si l'on sait à priori que la fonction valeur v vérifie $G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) < 0$, de telle sorte que $H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) < +\infty$ pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, on va alors rechercher v solution de l'équation de Bellman (3.45) et un contrôle optimal Markovien attaignant le supremum dans $H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x))$. On verra un exemple dans le paragraphe 3.5.
3. Lorsqu'aucun des deux cas précédents n'est satisfait, on dit que le problème de contrôle stochastique est singulier : il n'existe pas de contrôle optimal dans la classe considérée et on doit résoudre l'inéquation variationnelle de Bellman. On en verra un exemple dans le chapitre suivant, paragraphe 4.4.

Remarque 3.3.8 Les résultats dans le cas horizon fini s'étendent aisément lorsque la fonction de coût J à minimiser a la forme plus générale suivante :

$$J(t,x,\alpha) = E\left[\int_t^T \Gamma(t,s) f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + \Gamma(T) g(X_T^{t,x})\right],$$

où

$$\Gamma(t,s) = \exp\left(-\int_t^s \beta(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right), \quad t \leq s \leq T,$$

et $\beta(.,.,a)$ est une fonction continue bornée sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ pour tout $a \in A$. Dans ce cas l'Hamiltonien associé au problème de contrôle stochastique est :

$$H_1(t,x,v,p,M) = \sup_{a \in A}\left[\beta(t,x,a)v - b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(t,x,a)\right].$$

Remarque 3.3.9 Lorsqu'on étudie un problème de maximisation

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + g(X_T^{t,x})\right],$$

on peut se ramener à un problème de minimisation en considérant la fonction valeur $-v$. Ceci revient alors à considérer l'Hamiltonien

$$H_1(t,x,p,M) = \inf_{a \in A}\left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(t,x,a)\right],$$

et son domaine $\mathrm{dom}(H_1) = \{(t,x,p,M) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}_n \ : H_1(t,x,p,M) > -\infty\}$. L'hypothèse (3.37) devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} & H_1 \text{ est continue sur } \mathrm{int}(\mathrm{dom}(H_1)) \\ \text{et il existe } & G_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \text{ continue telle que } : \\ & (t,x,p,M) \in \mathrm{dom}(H_1) \iff G_1(t,x,p,M) \geq 0 \end{aligned}$$

L'inéquation variationnelle que doit satisfaire la fonction valeur est alors :

$$\begin{aligned} & \min\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)\right\} \\ = \ & 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

On a une remarque analogue dans le cas d'un problème de maximisation en horizon infini.

3.4 Théorème de vérification

Le théorème 3.3.2 établit que l'équation de Bellman est une EDP nécessairement satisfaite par la fonction valeur d'un problème de contrôle stochastique. On donne dans ce paragraphe une réciproque à ce résultat dans le cas d'un problème de contrôle stochastique dit régulier (par contraste avec un problème de contrôle stochastique singulier). Il s'agit des théorèmes de vérification suivants, d'abord dans le cas d'un horizon fini puis d'un horizon infini.

Théorème 3.4.3 *(Horizon fini)*
Soit $w \in C^{1,2}([0,T[,\mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T[\times\mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique, i.e. il existe une constante C telle que :

$$|w(t,x)| \quad \leq \quad C(1+|x|^2), \quad \forall (t,x) \; \in [0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

(i) Supposons que :

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}[-\mathcal{L}^a w(t,x) - f(t,x,a)] \quad \leq \quad 0, \quad (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{3.47}$$

$$w(T,x) \quad \leq \quad g(x), \quad x \in R^n. \tag{3.48}$$

Alors $w \leq v$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.
(ii) De plus supposons que $w(T.) = g$, et pour tout $(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n$, il existe $\hat{\alpha}(t,x)$ mesurable à valeurs dans A tel que :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}[-\mathcal{L}^a w(t,x) - f(t,x,a)] &= -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)} w(t,x) - f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

l'EDS :

$$dX_s = b(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s))ds + \sigma(X_s,\hat{\alpha}(s,X_s))dW_s$$

admette une unique solution, notée $\hat{X}_s^{t,x}$, étant donnée une condition initiale $X_t = x$, et $\hat{\alpha}(s,\hat{X}_s^{t,x})$ $t \leq s \leq T$, $\in \mathcal{A}(t,x)$. Alors $w = v$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ et $\hat{\alpha}$ est un contrôle optimal Markovien.

Preuve.
(i) Puisque $w \in C^{1,2}([0,T[,\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathcal{A}(t,x)$, $s \in [t,T]$, et pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t,+\infty[$, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} w(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}) &= w(t,x) + \int_t^{s\wedge\tau} \frac{\partial w}{\partial t}(u,X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u,X_u^{t,x})du \\ &\quad + \int_t^{s\wedge\tau} \nabla_x w(u,X_u^{t,x})'\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u)dW_u. \end{aligned}$$

On choisit $\tau = \tau_n = \inf\{u \geq t \ : |\nabla_x w(u, X_u^{t,x})' \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)| \geq n\}$ en notant que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini. Le processus arrêté $\{\int_t^{s\wedge\tau_n} \nabla_x w(u, X_u^{t,x})' \, \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u) dW_u$, $s \geq t\}$ est donc une martingale et on a en prenant l'espérance :

$$E\left[w(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})\right] = w(t,x) + E\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) du\right].$$

Puisque w satisfait (3.47), on a :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) + f(X_u^{t,x}, \alpha_u) \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x),$$

d'où :

$$E\left[w(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})\right] \geq w(t,x) - E\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x).$$

On a

$$\left|\int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right| \leq \int_t^T \left|f(X_u^{t,x}, \alpha_u)\right| du,$$

et le terme de droite est intégrable d'après la condition d'intégrablité sur $\mathcal{A}(t,x)$. Comme w est à croissance quadratique, on a :

$$\left|w(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})\right| \leq C(1 + \sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,x}|^2),$$

et le terme de droite est intégrable d'après l'estimation (3.12) du lemme 3.1.1. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini :

$$E\left[w(s, X_s^{t,x})\right] \geq w(t,x) - E\left[\int_t^s f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x).$$

Comme w est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, en faisant tendre s vers T, on a par le théorème de convergence dominée et en utilisant aussi (3.48) :

$$E\left[g(X_T^{t,x})\right] \geq w(t,x) - E\left[\int_t^T f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x),$$

et donc $w(t,x) \leq v(t,x)$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

(ii) On applique la formule d'Itô à $w(s, \hat{X}_s^{t,x})$ (après avoir localisé avec τ_n) :

$$E\left[w(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = w(t,x) + E\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}(u, \hat{X}_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x})} w(u, \hat{X}_u^{t,x}) du\right].$$

Or par définition de $\hat{\alpha}(t,x)$, on a :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)} w(t,x) - f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)) = 0,$$

d'où :

$$E\left[w(s,\hat{X}_s^{t,x})\right] = w(t,x) - E\left[\int_t^s f(\hat{X}_u^{t,x},\hat{\alpha}(u,\hat{X}_u^{t,x}))du\right].$$

En faisant tendre s vers T, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} w(t,x) &= E\left[\int_t^T f(\hat{X}_u^{t,x},\hat{\alpha}(u,\hat{X}_u^{t,x}))du + g(\hat{X}_T^{t,x})\right] \\ &= J(t,x,\hat{\alpha}). \end{aligned}$$

Donc $w(t,x) = J(t,x,\hat{\alpha}) \geq v(t,x)$ et finalement $w = v$ avec $\hat{\alpha}$ comme contrôle optimal Markovien. □

Théorème 3.4.4 *(Horizon infini)*
Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique.
(i) Supposons que :

$$\beta w(x) + \sup_{a\in A}[-\mathcal{L}^a w(x) - f(x,a)] \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.49}$$

$$\liminf_{T\to\infty} e^{-\beta T}E[w(X_T^x)] \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathcal{A}(x), \tag{3.50}$$

Alors $w \leq v$ sur $\mathbb{R}^n$.
(ii) Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\hat{\alpha}(x)$ mesurable à valeurs dans A tel que :

$$\begin{aligned} \beta v(x) + \sup_{a\in A}[-\mathcal{L}^a w(x) - f(x,a)] &= \beta v(x) - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(x)}w(x) - f(x,\hat{\alpha}(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

l'EDS :

$$dX_s = b(X_s,\hat{\alpha}(X_s))ds + \sigma(X_s,\hat{\alpha}(X_s))dW_s$$

admette une unique solution, notée $\hat{X}_s^x$, étant donnée une condition initiale $X_0 = x$, avec

$$\limsup_{T\to\infty} e^{-\beta T}E[w(\hat{X}_T^x] \geq 0, \tag{3.51}$$

et tel que $\hat{\alpha}(\hat{X}_s^x)$, $s \geq 0$, $\in \mathcal{A}(x)$. Alors $w(x) = v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\alpha}$ est un contrôle optimal Markovien.

Preuve. (i) Soit $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathcal{A}(x)$. On a par la formule d'Itô à $e^{-\beta t}w(X_t^x)$ entre 0 et $T \wedge \tau_n$:

$$\begin{aligned} e^{-\beta T\wedge\tau_n} w(X^x_{T\wedge\tau_n}) &= w(x) + \int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\beta u}\left[\mathcal{L}^{\alpha_u} w(X_u^x - \beta w(X_u^x)\right] du \\ &\quad + \int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\beta u}\nabla w(X_u^x)'\sigma(X_u^x,\alpha_u)dW_u. \end{aligned}$$

Ici, τ_n est le temps d'arrêt : $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \ : |\nabla_x w(t, X_t^x)'\sigma(X_t^x, \alpha_t)| \geq n\}$. Comme le terme d'intégrale stochastique arrêtée est une martingale, on a en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\beta T\wedge\tau_n} w(X^x_{T\wedge\tau_n})\right] &= w(x) + E\left[\int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\beta u}\left(-\beta w + \mathcal{L}^{\alpha_u} w\right)(X_u^x)du\right] \\ &\geq w(x) - E\left[\int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\beta u} f(X_u^x,\alpha_u)du\right], \qquad (3.52) \end{aligned}$$

d'après (3.49). Par la condition de croissance quadratique de w et la condition d'intégrabilité (3.9), on peut appliquer le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini :

$$E\left[e^{-\beta T} w(X_T^x)\right] \geq w(x) - E\left[\int_0^T e^{-\beta u} f(X_u^x,\alpha_u)du\right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(x).$$

En faisant tendre T vers l'infini, on a d'après (3.50) et le théorème de convergence dominée :

$$w(x) \leq E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} f(X_t^x,\alpha_t)dt\right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(x),$$

et donc $w(x) \leq v(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) En appliquant la formule d'Itô à $e^{-\beta t}w(\hat{X}_s^x)$ (après avoir localisé avec τ_n) et en observant que le contrôle $\hat{\alpha}$ atteint l'égalité dans (3.52), on a :

$$E\left[e^{-\beta T} w(\hat{X}_T^x)\right] = w(x) - E\left[\int_0^T e^{-\beta u} f(\hat{X}_u^x, \hat{\alpha}(\hat{X}_u^x))du\right].$$

En faisant tendre T vers l'infini et d'après (3.51), on obtient ainsi :

$$w(x) \geq J(x,\hat{\alpha}) = E\left[\int_0^\infty e^{-\beta u} f(\hat{X}_u^x, \hat{\alpha}(\hat{X}_u^x))du\right]$$

et donc $w(x) = v(x) = J(x,\hat{\alpha})$. □

Le théorème précédent suggère la stratégie suivante pour résoudre le problème de contrôle stochastique. Dans le cas horizon fini, résoudre l'EDP non linéaire d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^a w(t,x) - f(t,x,a)\right] = 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \qquad (3.53)$$

avec la condition terminale $w(T,x) = g(x)$. Fixer $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$ et résoudre $\sup_{a\in A}$ $[-\mathcal{L}^a w(t,x) - f(x,a)]$ comme un problème de maximum en $a \in A$. On note $a^*(t,x)$ la valeur de a qui réalise le maximum. Si cette EDP non linéaire avec condition terminale admet une solution régulière w, alors w est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique et a^* est un contrôle optimal Markovien. Cette méthode se justifie donc si l'EDP de Bellman (3.53) admet une solution $C^{1,2}$ satisfaisant les conditions d'application du théorème de vérification. Une condition suffisante d'existence de solution régulière à (3.53) est la condition d'uniforme ellipticité suivante :

$$\begin{array}{rcll} \text{Il existe une constante} & c > 0 & \text{telle que} & \\ y'\sigma(x,a)\sigma'(x,a)y & \geq & c|y|^2, & \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall a \in A. \end{array} \tag{3.54}$$

On a alors le résultat suivant dont une preuve peut être trouvée dans Fleming et Rishel (1975).

Théorème 3.4.5 *Supposons* (3.54) *et*

- *A est compact,*
- *pour $\varphi = b, \sigma, f$, la fonction $\varphi \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n\times A)$ et φ, $\nabla_x\varphi$ sont à croissance quadratique en x uniformément en (t,a),*
- *$g \in C^3(\mathbb{R}^n)$ et g, ∇g sont à croissance quadratique.*

Alors l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (3.53) *avec la condition terminale $w(T,.)$ $= g$ admet une unique solution $w \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique.*

3.5 Application : Problème de Merton en horizon fini

Un agent investit une proportion α_t de sa richesse dans un actif risqué et $1-\alpha_t$ dans un actif sans risque, avec la contrainte qu'à toute date α_t doit être à valeurs dans A ensemble fermé convexe de $\mathbb{R}$. Son processus de richesse évolue selon l'EDS :

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{X_t\alpha_t}{S_t}dS_t + \frac{X_t(1-\alpha_t)}{S_t^0}dS_t^0 \\ &= X_t\left(\alpha_t\mu + (1-\alpha_t)r\right)dt + X_t\alpha_t\sigma dW_t. \end{aligned}$$

Partant d'une richesse initiale $X_t = x > 0$ au temps t, l'agent veut maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse terminale à un horizon $T > t$. Notons par $X^{t,x}$ le processus de richesse partant de x en t. Observons que les coefficients de X ne vérifient pas stricto-sensu la condition de Lipschitz uniforme en les contrôles a. En fait, on se ramène usuellement à ce cadre en considérant le logarithme de la richesse positive. La fonction valeur du problème de maximisation est donc :

$$v(t,x) \quad = \quad \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\left[U(X_T^{t,x})\right], \quad (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}_+,$$

où $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des processus α $\mathbb{F}$-adaptés à valeurs dans A et tels que $E[\int_t^T |\alpha_s|^2 ds] < \infty$.

La fonction d'utilité U est croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$. Vérifions que $v(t,.)$ est croissante et concave en x. Soit $0 < x \leq y$ et α un processus de contrôle. Notons $Z_s = X_s^{t,x} - X_s^{t,y}$. Alors $dZ_s = Z_s\left[(\alpha_s\mu + (1-\alpha_s)r)\,ds + \alpha_s\sigma dW_s\right]$, $Z_t = y - x \geq 0$ et donc $Z_s \geq 0$ ou encore $X_s^{t,y} \geq X_s^{t,x}$ pour tout $s \geq t$. Puisque U est croissante, on a $U(X_T^{t,x}) \leq U(X_T^{t,y})$ d'où :

$$E\left[U(X_T^{t,x})\right] \;\leq\; E\left[U(X_T^{t,y})\right] \leq v(t,y), \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_t,$$

et donc $v(t,x) \leq v(t,y)$. Soit $0 < x_1, x_2$, α^1, α^2 deux processus de contrôle et $\lambda \in [0,1]$. Posons $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, X^{t,x_1} le processus de richesse partant de x_1 et controlé par α^1, X^{t,x_2} le processus de richesse partant de x_2 et controlé par α^2. Posons :

$$\alpha_s^\lambda \;=\; \frac{\lambda X_s^{t,x_1}\alpha_s^1 + (1-\lambda)X_s^{t,x_2}\alpha_s^2}{\lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda)X_s^{t,x_2}}.$$

Notons que par convexité de A, le processus $\alpha^\lambda \in \mathcal{A}_t$. De plus, d'après la structure linéaire de l'évolution de l'équation de la richesse, le processus $X^\lambda := \lambda X^{t,x_1} + (1-\lambda)X^{t,x_2}$ est gouverné par :

$$\begin{aligned} dX_s^\lambda &= X_s^\lambda\left(\alpha_s^\lambda\mu + (1-\alpha_s^\lambda)r\right)ds + X_s^\lambda\alpha_s^\lambda\sigma dW_s, \quad s \geq t, \\ X_t^\lambda &= x_\lambda. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\lambda X^{t,x_1} + (1-\lambda)X^{t,x_2}$ est un processus de richesse partant de x_λ en t et contrôlé par α^λ. D'après la concavité de la fonction U, on a :

$$U\left(\lambda X_T^{t,x_1} + (1-\lambda)X_T^{t,x_2}\right) \;\geq\; \lambda U(X_T^{t,x_1}) + (1-\lambda)U(X_T^{t,x_2}),$$

d'où :

$$v(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;\geq\; \lambda E\left[U(X_T^{t,x_1})\right] + (1-\lambda)E\left[U(X_T^{t,x_2})\right],$$

et ceci pour tout α^1, α^2. On en déduit que :

$$v(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;\geq\; \lambda v(x_1) + (1-\lambda)v(x_2).$$

En fait, on voit que si U est strictement concave et s'il existe un contrôle optimal, alors les arguments ci-dessus montrent que la fonction v est aussi strictement concave en x.

On va donc chercher à résoudre l'équation de Bellman :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \inf_{a\in\mathbb{R}}\left[-\mathcal{L}^a w(t,x)\right] \;=\; 0, \tag{3.55}$$

avec la condition terminale

$$w(T,x) \quad = \quad U(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.56}$$

Ici $\mathcal{L}^a w(t,x) = x(a\mu + (1-a)r)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2a^2\sigma^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Le problème (3.55)-(3.56) n'a en général pas de solution explicite pour une fonction d'utilité U quelconque. Cependant, dans le cas particulier d'une fonction puissance :

$$U(x) \quad = \quad x^p, \quad 0 < p < 1,$$

on peut résoudre explicitement ce problème. Cherchons une solution de la forme :

$$w(t,x) \quad = \quad \phi(t)x^p.$$

En substituant dans (3.55)-(3.56), on obtient que ϕ satisfait :

$$\begin{aligned} -\phi'(t) + \lambda\phi(t) &= 0, \\ \phi(T) &= 1, \end{aligned}$$

où

$$\lambda \quad = \quad \inf_{a\in A}\left[-ap(\mu - r) - pr + \frac{1}{2}a^2p(1-p)\sigma^2\right]. \tag{3.57}$$

On obtient alors $\phi(t) = \exp(-\lambda(T-t))$ Ainsi, la fonction donnée par :

$$w(t,x) \quad = \quad \exp(-\lambda(T-t))x^p, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \tag{3.58}$$

est régulière, strictement croissante et strictement concave, et est solution de (3.55)-(3.56). De plus, la fonction $a \in A \mapsto -ap(\mu - r) - rp + \frac{1}{2}a^2p(1-p)\sigma^2$ est strictement convexe sur l'ensemble convexe A donc atteint son minimum en $\hat{a}$ constant. Par construction, $\hat{a}$ atteint l'infimum de $\inf_{a\in A}[-\mathcal{L}^a w(t,x)]$. De plus, l'équation de la richesse associée au contrôle constant $\hat{a}$:

$$dX_t \quad = \quad X_t\left(\hat{a}\mu + (1-\hat{a})r\right)dt + X_t\hat{a}\sigma dW_t$$

admet bien une unique solution, étant donnée une condition initiale. Ceci prouve donc finalement d'après le théorème de vérification, que la fonction valeur du problème de maximisation est donnée par (3.58) et que la proportion optimale de richesse à investir dans l'actif risqué est constante et donnée par $\hat{a}$. Notons que lorsque $A = \mathbb{R}$, on a :

$$\hat{a} \quad = \quad \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-p)}, \tag{3.59}$$

et

$$\lambda \quad = \quad -\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{p}{1-p} - rp.$$

3.6 Régularité de la fonction valeur

Les théorèmes des sections précédentes requièrent que la fonction valeur du problème de contrôle stochastique soit régulière. Mais en général, ce n'est pas le cas et il existe de nombreux exemples où la fonction valeur n'est même pas dérivable. On commence par étudier la continuité de la fonction valeur par des techniques standard. On donne ensuite des exemples dans le cas déterministe et stochastique de fonctions valeur non régulières.

3.6.1 Propriétés Hölderiennes de la fonction valeur

On montre d'abord un résultat de continuité-Lipschitz de la fonction valeur par rapport à la variable d'espace.

Proposition 3.6.3 *(Horizon fini : continuité en espace)*
On suppose que f et g sont des fonctions Lipschitziennes en x, uniformément en (t,a) $\in [0,T]\times A$. Alors $v(t,.)$ est Lipschitzienne, i.e. il existe une constante C (dépendant de T) telle que pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|v(t,x) - v(t,y)| \;\; \leq \;\; C|x-y|.$$

Preuve. Dans la suite, C désigne une constante générique ne dépendant que de T.

En notant que $|\inf_i a_i - \inf_j b_j| \leq \sup_{i,j}|a_i - b_j|$, on a :

$$\begin{aligned}
|v(t,x) - v(t,y)| &= \Big| \inf_{\alpha\in\mathcal{A}(t,x)} E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right] \\
&\qquad - \inf_{\alpha\in\mathcal{A}(t,y)} E\left[\int_t^T f(X_s^{t,y},\alpha_s)ds + g(X_T^{t,y})\right] \\
&\leq \sup_{\alpha\in\mathcal{A}(t,x)\cup\mathcal{A}(t,y)} \Big\{ E\int_t^T |f(X_s^{t,x},\alpha_s) - f(X_s^{t,y},\alpha_s)|ds \\
&\qquad + E|g(X_T^{t,x}) - g(X_T^{t,y})| \Big\}
\end{aligned}$$

Par la condition de Lipschitz sur f et g, on en déduit :

$$\begin{aligned}
|v(t,x) - v(t,y)| &\leq C \sup_{\alpha\in\mathcal{A}(t,x)\cup\mathcal{A}(t,y)} \left\{ E\int_t^T |X_s^{t,x} - X_s^{t,y}|ds + E|X_T^{t,x} - X_T^{t,y}| \right\} \\
&\leq C|x-y| \left[\int_t^T e^{\beta_0(s-t)}ds + e^{\beta_0(T-t)}\right] \;\leq\; C|x-y|,
\end{aligned}$$

d'après l'estimation (3.15) du lemme 3.1.1. □

Dans le cas d'un horizon infini, on montre une propriété Hölderienne de la fonction valeur sous des hypothèses fortes supplémentaires sur la fonction f.

Proposition 3.6.4 *(Horizon infini)*
On suppose que f est une fonction bornée et Lipschitzienne en x, uniformément en $a \in A$. Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|v(x) - v(y)| \quad \leq \quad \begin{cases} C|x-y|^{\frac{\beta}{\beta_0}} & si \quad 0 < \beta \leq \beta_0 \\ C|x-y| & si \quad \beta > \beta_0. \end{cases}$$

Preuve. Puisque

$$v(x) \quad = \quad \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(x)} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s) ds\right],$$

on a pour tout $T > 0$:

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| \quad & \leq \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x) \cup \mathcal{A}(y)} E \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} |f(X_s^x, \alpha_s) - f(X_s^y, \alpha_s)| ds \\ & \leq \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x) \cup \mathcal{A}(y)} E \int_0^{T} e^{-\beta s} |f(X_s^x, \alpha_s) - f(X_s^y, \alpha_s)| ds \\ & \quad + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x) \cup \mathcal{A}(y)} E \int_T^{+\infty} e^{-\beta s} |f(X_s^x, \alpha_s) - f(X_s^y, \alpha_s)| ds. \end{aligned}$$

Comme f est bornée et Lipschitz, on en déduit d'après l'estimation (3.15) du lemme 3.1.1 :

$$|v(x) - v(y)| \quad \leq \quad C|x-y| \int_0^T e^{(\beta_0 - \beta)s} ds + C e^{-\beta T},$$

soit :

$$|v(x) - v(y)| \quad \leq \quad C\left[\frac{1 - e^{-(\beta - \beta_0)T}}{\beta - \beta_0}\right] |x-y| + C e^{-\beta T}. \tag{3.60}$$

Si $\beta > \beta_0$, en faisant tendre T vers l'infini, on obtient $|v(x) - v(y)| \leq |x - y|$. Si $0 < \beta \leq \beta_0$ (avec la convention que le terme entre crochet dans (3.60) est égal à T lorsque $\beta = \beta_0$), on minimise à droite par rapport à T, le minimum étant atteint pour

$$\begin{aligned} e^{\beta_0 T} \quad & = \quad \frac{\beta(1 + |x| + |y|)}{|x-y|} \qquad \text{si } |x-y| \leq \beta \\ T \quad & = \quad 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } |x-y| > \beta. \end{aligned}$$

En substituant dans (3.60), on obtient le résultat voulu. □

Finalement, dans le cas d'un horizon fini, on montre la la continuité Hölderienne 1/2 en t de la fonction valeur sous l'hypothèse de bornitude de l'ensemble des contrôles.

Proposition 3.6.5 *(Horizon fini : continuité en temps)*
Sous les hypothèses de la proposition 3.6.3, on suppose de plus que A est compact et f est à croissance quadratique uniformément en $(t,a) \in [0,T] \times A$. Alors $v(.,x)$ est 1/2-Hölder continu. Plus précisément, il existe une constante C dépendant de T telle que pour tout $t,s \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|v(t,x) - v(s,x)| \quad \leq \quad C(1+|x|^2)|s-t|^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Dans la suite C désigne une constante ne dépendant que de T. Soit $0 \leq t < s \leq T$. D'après le principe de la programmation dynamique avec $\theta = s$, on a :

$$v(t,x) \quad = \quad \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\left[\int_t^s f(X_u^{t,x}, \alpha_u)du + v(s, X_s^{t,x})\right],$$

d'où :

$$\begin{aligned} |v(t,x) - v(s,x)| \quad &= \quad \left|\inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\left[\int_t^s f(X_u^{t,x}, \alpha_u)du + v(s, X_s^{t,x}) - v(s,x)\right]\right| \\ &\leq \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\int_t^s |f(X_u^{t,x}, \alpha_u)|du + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\left|v(s, X_s^{t,x}) - v(s,x)\right|. \end{aligned}$$

Comme f est à croissance quadratique et d'après la Lipschitz-continuité de $v(s,.)$ prouvée dans la proposition 3.6.3, on en déduit :

$$|v(t,x) - v(s,x)| \quad \leq \quad C\int_t^s \left(1 + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E|X_u^{t,x}|^2\right)du + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left|X_s^{t,x} - x\right|.$$

Comme A est compact, alors d'après les estimations (3.12) et (3.13) du lemme 3.1.1 et la remarque 3.1.2, on en déduit :

$$\begin{aligned} |v(t,x) - v(s,x)| \quad &\leq \quad C(1+|x|^2)\left[(s-t) + (s-t)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \quad C(1+|x|^2)(s-t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.6.10 Lorsque A n'est pas compact et pour des problèmes de contrôles singuliers, il n'est pas évident à priori de montrer la continuité de la fonction valeur. On verra au chapitre prochain comment obtenir la continuité grâce à la théorie des solutions de viscosité discontinues.

3.6.2 Exemple de fonction valeur non régulière : cas déterministe

Nous décrivons ici le cas d'un problème de contrôle déterministe, $\sigma \equiv 0$, avec $b(x,a) = a$, $a \in [-1,1]$, $n = 1$. L'état du système est donc gouverné par : $dX_t = \alpha_t dt$, $X_0 =$

x. Soit f une fonction paire C^∞, à support compact avec f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction valeur d'un problème à horizon fini :

$$v(x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(X_t)dt = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x + \int_0^t \alpha_s ds)dt,$$

soit :

$$v(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)dt, & x > 0 \ \ (\alpha_s^* = 1) \\ \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x-t)dt, & x \leq 0 \ \ (\alpha_s^* = -1). \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} v'(0^+) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} f'(t)dt = -f(0) + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt < 0 \\ v'(0^-) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} f'(-t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t} f'(t)dt = -v'(0^+). \end{aligned}$$

Donc v n'est pas dérivable en $x = 0$. Comme f est paire, v est aussi paire. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc v aussi.

Notons que l'équation d'HJB s'écrit :

$$v + \sup_{a\in[-1,1]} [-av'] = f$$

ou encore

$$|v'| + v = f.$$

Cette EDP n'admet donc pas de solution régulière sur tout $\mathbb{R}$.

3.6.3 Exemple de problème de contrôle stochastique singulier

On considère le processus contrôlé réel gouverné par :

$$dX_s = \alpha_s dW_s,$$

où le contrôle α est à valeurs dans $A = \mathbb{R}$. Soit g une fonction mesurable positive ou à croissance quadratique sur $\mathbb{R}$, et considérons le problème de contrôle stochastique :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_t} E[g(X_T^{t,x})], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

L'Hamiltonien de ce problème est $H(M) = \sup_{a \in \mathbb{R}}[-\frac{1}{2}a^2 M]$. On voit donc que $H(M) < +\infty$ ssi $-M \leq 0$ et dans ce cas $H(M) = 0$. Nous allons voir que pour un large choix de fonctions g, le problème de contrôle stochastique est singulier et la fonction valeur v n'est pas régulière.

On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $v \in \in C^{1,2}([0,T[,\mathbb{R})$. Alors, d'après le théorème 3.3.2, v est solution de l'inéquation variationnelle de Bellman, i.e. :

$$\max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}, -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} = 0, \quad \text{sur } [0,T[\times\mathbb{R}. \tag{3.61}$$

Ceci implique en particulier que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$, autrement dit :

$$v(t,.) \quad \text{est convexe sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } t \in [0,T[. \tag{3.62}$$

Comme le contrôle constant nul est dans $\mathcal{A}_t$, il est immédiat que

$$v(t,x) \leq g(x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

En notant par g^{conv} l'enveloppe convexe de g, i.e. la plus grande fonction convexe minorant g, on en déduit d'après (3.62) :

$$v(t,x) \leq g^{conv}(x), \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}. \tag{3.63}$$

En utilisant $g^{conv} \leq g$, l'inégalité de Jensen et la propriété de martingale de $X_s^{t,x}$ pour $\alpha \in \mathcal{A}_t$, on a :

$$\begin{aligned} v(t,x) &\geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_t} E[g^{conv}(X_T^{t,x})] \\ &\geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_t} g^{conv}\left(E[X_T^{t,x}]\right) = g^{conv}(x). \end{aligned}$$

En combinant avec (3.63), on en déduit que

$$v(t,x) = g^{conv}(x), \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}. \tag{3.64}$$

On aboutit à une contradiction dès lors que la fonction g^{conv} n'est pas $C^2(\mathbb{R})$, par exemple si $g(x) = \max(x-\kappa, 0) = g^{conv}(x)$.

Remarque 3.6.11 On verra plus tard que même si l'égalité (3.61) ne peut pas être interprétée au sens classique, la relation (3.64) reste vraie. En particulier, on voit que la fonction valeur v est discontinue en T dès lors que $g \neq g^{conv}$.

3.7 Références

Pour une introduction aux problèmes de contrôles stochastiques :

- Demange G. et J.C. Rochet (1992) : Méthodes mathématiques de la finance, Economica.
- Duffie D. (1992) : Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton, University Press.
- Kamien M. et N. Schwartz (1981) : Dynamic optimization, North Holland.
- Oksendal B. (1991) : Stochastic differential equations : an introduction with applications, 4th edition, Springer Verlag.

Pour un traitement plus théorique et approfondi :

- Fleming W. et R. Rishel (1975) : Deterministic and stochastic optimal control, Springer Verlag.
- Krylov N. (1980) : Controlled Diffusion Processes, Springer Verlag
- Fleming W. et M. Soner (1993) : Controlled Markov processes and viscosity solutions, Springer Verlag.

Chapitre 4

Solutions de viscosité et équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman

4.1 Définition des solutions de viscosité

Suivant le type de problème à horizon fini ou infini, on a considéré des (in)équations (variationnelles) de Bellman paraboliques :

$$
\begin{aligned}
& \max\left\{-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x w(t,x), D_x^2 w(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x w(t,x), D_x^2 w(t,x))\right\} \\
= & \ 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

ou elliptiques :

$$
\begin{aligned}
& \max\left\{\beta w(x) + H_2(x,\nabla w(x), D^2 w(x)), G_2(x,\nabla w(x), D^2 w(x)\right\} \\
= & \ 0, \quad x \in R^n, \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

où $H_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est défini dans le cas des problèmes de contrôle stochastique considérés au chapitre précédent par :

$$
H_1(t,x,p,M) = \sup_{a\in A}\left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(t,x,a)\right], \quad (4.3)
$$

et $H_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est défini par :

$$
H_2(x,p,M) = \sup_{a\in A}\left[-b(x,a).p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)M\right) - f(x,a)\right], \quad (4.4)
$$

et G_1 et G_2 sont des fonctions continues telle que $H_1(t,x,p,M) < +\infty$ ssi $G_1(t,x,p,M) \leq 0$, et $H_2(x,p,M) < +\infty$ ssi $G_2(x,p,M) \leq 0$. Ici $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ symétriques qu'on munit de l'ordre : $M_1 \leq M_2$ ssi $M_2 - M_1$ est une matrice symétrique positive.

Plus généralement, on va considérer ici des équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre :

$$F(x, w(x), \nabla w(x), D^2 w(x)) \quad = \quad 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}, \tag{4.5}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F est une fonction continue de $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ dans $\mathbb{R}$. La fonction F doit satisfaire la condition dite d'ellipticité : pour tout $x \in \mathcal{O}$, $w \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$, $M, \widehat{M} \in \mathcal{S}_N$,

$$M \leq \widehat{M} \quad \Longrightarrow \quad F(x, w, p, M) \ \geq \ F(x, w, p, \widehat{M}). \tag{4.6}$$

Dans le cas des problèmes d'évolution, un point de $\mathbb{R}^N$ doit être compris comme variable de temps t et d'espace x dans $\mathbb{R}^n$ $(N = n+1)$, $\mathcal{O}$ doit être vu comme un ouvert de la forme $[0, T[\times \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F(t, x, w, p_t, p, M)$ doit satisfaire de plus la condition de parabolicité : pour tout $t \in [0, T[$, $x \in \mathcal{O}_n$, $w \in \mathbb{R}$, $p_t, \hat{p}_t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathcal{S}_n$,

$$p_t \leq \hat{p}_t \quad \Longrightarrow \quad F(t, x, w, p_t, p, M) \ \geq \ F(t, x, w, \hat{p}_t, p, M). \tag{4.7}$$

La condition d'ellipticité est évidemment satisfaite dans le cas des Hamiltoniens (4.3) ou (4.4). La condition de parabolicité est satisfaite dans le cas du problème d'évolution (4.1).

Etant donné une fonction w localement borné de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, on définit son envelope semicontinue supérieure $w^* : \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ par :

$$w^*(x) \quad = \quad \limsup_{x' \to x} w(x')$$

et son envelope semicontinue inférieure w_* par :

$$w_*(x) \quad = \quad \liminf_{x' \to x} w(x').$$

On rappelle que w^* (resp. w^*) est la plus petite (resp. grande) fonction semicontinue supérieurement (s.c.s) majorant (resp. semicontinue inférieurement (s.c.i) minorant) w sur $\mathcal{O}$. Notons qu'une fonction w localement borné sur $\mathcal{O}$ est semicontinue inférieurement (resp. supérieurement) ssi $w = w_*$ (resp. w^*) sur $\mathcal{O}$, et qu'elle est continue sur $\mathcal{O}$ ssi $w = w_* = w^*$ sur $\mathcal{O}$.

Définition 4.1.1 *Soit $w : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ localement borné.*
(i) On dit que w est une sous-solution (discontinue) de viscosité de (4.5) *si on a :*

$$F(\bar{x}, \varphi(\bar{x}), \nabla \varphi(\bar{x}), D^2 \varphi(\bar{x})) \quad \leq \quad 0,$$

en tout point $\bar{x} \in \mathcal{O}$ *et pour toute fonction* $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ *tel que* $0 = (w^* - \varphi)(\bar{x}) = \max_{\mathcal{O}}(w^* - \varphi)$.

(ii) On dit que w *est une sursolution (discontinue) de viscosité de* (4.5) *si on a :*

$$F(\bar{x}, \varphi(\bar{x}), \nabla\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \quad \geq \quad 0,$$

en tout point $\bar{x} \in \mathcal{O}$ *et pour toute fonction* $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ *tel que* $0 = (w_* - \varphi)(\bar{x}) = \min_{\mathcal{O}}(w_* - \varphi)$.

(iii) On dit que w *est une solution (discontinue) de viscosité de* (4.5) *si* w *est à la fois soussolution et sursolution de viscosité de* (4.1).

Remarque 4.1.1 La définition ci-dessus reste inchangée si le minimum ou maximum $\bar{x}$ est local et/ou strict.

Remarque 4.1.2 Si v est une sous-solution (resp. sursolution) de viscosité de (4.5) alors v^* (resp. v_*) est une sous-solution s.c.s (resp. sursolution s.c.i) de viscosité de (4.5).

On vérifie d'abord que la notion de solution de viscosité est cohérente avec la notion de solution classique.

Proposition 4.1.1 *Soit* $w \in C^2(\mathcal{O})$. *Alors* w *est sursolution (resp. sous-solution) de viscosité de* (4.5) *si et seulement si* w *est sursolution (resp. sous-solution) classique de* (4.5).

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'EDP paraboliques. Supposons d'abord que w est sursolution de viscosité de (4.5). Puisque w est régulière, $\varphi \equiv w$ $(= w_*)$ peut être choisie comme fonction test. De plus, tout point $(t,x) \in [0,T[\times\mathcal{O}$ est un minimum global de $w_* - \varphi \equiv 0$. Donc on a par définition des sursolutions de viscosité :

$$F(t,x,\varphi(t,x), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x), \nabla_x\varphi(t,x), D_x^2\varphi(t,x)) \quad \geq \quad 0$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathcal{O}$ et donc $w = \varphi$ est sursolution classique de (4.5).

Supposons que w est sursolution classique de (4.5). Soit $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ et $(\bar{t},\bar{x}) \in [0,T[\times\mathcal{O}$ un minimum global de $w_* - \varphi = w - \varphi$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(w-\varphi)}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) \quad &\geq \quad 0 \quad (= 0 \text{ si } \bar{t} > 0) \\ \nabla_x w(\bar{t},\bar{x}) = \nabla_x\varphi(\bar{t},\bar{x}) \quad &\text{et} \quad D_x^2 w(\bar{t},\bar{x}) \geq D_x^2\varphi(\bar{t},\bar{x}). \end{aligned}$$

On en déduit par la condition (4.6) et (4.7) :

$$\begin{aligned} & F(\bar{t},\bar{x},\varphi(\bar{t},\bar{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}), \nabla_x\varphi(\bar{t},\bar{x}), D_x^2\varphi(\bar{t},\bar{x})) \\ \geq \quad & F(\bar{t},\bar{x},w(\bar{t},\bar{x}), \frac{\partial w}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}), \nabla_x w(\bar{t},\bar{x}), D_x^2 w(\bar{t},\bar{x})) \ \geq \ 0, \end{aligned}$$

c'est à dire que w est sursolution de viscosité de (4.5).

La propriété de soussolution est prouvée de manière similaire. $\square$

4.2 Exemple

1) Reprenons l'exemple 3.6.2 du chapitre précédent : $b(x,a) = a$, $a \in A = [-1.1]$, $\sigma = 0$, et :

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^\infty e^{-t} f(X_t) dt, \tag{4.8}$$

avec f C^∞, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ à support compact. On a calculé directement v :

$$v(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)dt, & x > 0 \ \ (\alpha_s^* = 1) \\ \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x-t)dt, & x \leq 0 \ \ (\alpha_s^* = -1). \end{cases}$$

On a vu aussi que $v'(0^-) = -v'(0^+) = p_0 = f(0) - v(0) > 0$.

D'autre part, l'équation de Bellman associée à (4.8) est :

$$w + \sup_{a \in [-1,1]} [-aw'] = f$$

ou encore

$$|w'| + w = f. \tag{4.9}$$

Vérifions que la fonction v (non régulière) calculé directement ci-dessus est bien solution de viscosité de (4.9).

1er cas. Soit $\bar{x} \neq 0$. Alors v est régulière C^1 en $\bar{x}$ et on a $|v'(\bar{x})| + v(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Soit φ fonction test C^1 telle que $v - \varphi$ admette un extrémum en $\bar{x}$. Alors $v'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$ et donc :

$$|\varphi'(\bar{x})| + v(\bar{x}) = |v'(\bar{x})| + v(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Ainsi, l'inégalité de sursolution et soussolution est vérifiée en $\bar{x}$.

2ème cas. Soit $\bar{x} = 0$. Il n'existe pas de fonction test φ C^1 tel que $\bar{x} = 0$ soit un minimum de $(v - \varphi)$ et donc la condition de sursolution est vide. Soit φ C^1 tel que $\bar{x}$

$= 0$ soit un maximum de $(v - \varphi)$. Alors on a : $-p_0 \leq \varphi'(0) \leq p_0$, d'où $|\varphi'(0)| \leq p_0$. Par définition de p_0, on en déduit que :

$$|\varphi'(0)| + v(0) \quad \leq \quad f(0),$$

qui est l'inégalité de soussolution.

2) On illustre aussi le fait que la notion de solution de viscosité sélectionne la “bonne” fonction valeur. Considérons le cas particulier où $f = 0$. Alors évidemment $v = 0$. L'équation de Bellman s'écrit :

$$|w'| + w \quad = \quad 0. \tag{4.10}$$

Considérons la fonction $w(x) = -ae^{-|x|}$ qui est C^∞ sauf en 0.

Cette fonction satisfait clairement (4.10) sauf en 0. Que se passe-t-il en $\bar{x} = 0$? Il n'existe pas de fonction test φ C^1 tel que $\bar{x} = 0$ soit un maximum de $(v - \varphi)$ et donc la condition de soussolution est vide. La fonction constante $\varphi = -a$ est C^1 et telle que $\bar{x} = 0$ est un minimum de $w - \varphi$. Or $|\varphi'(0)| + w(0) = -a < 0$ et donc la condition de sursolution n'est pas vérifiée.

4.3 Résultats de comparaison

On dit que l'on a un principe de comparaison fort (pour les solutions discontinues) pour l'EDP (4.5) si l'énoncé suivant est vrai :

Si v est une sous-solution de viscosité de (4.5) et w est une sursolution de viscosité de (4.5) tel que $v^* \leq w_*$ sur $\partial\mathcal{O}$ alors

$$v^* \quad \leq \quad w_* \quad \text{sur } \bar{\mathcal{O}}.$$

Dans le cas d'une EDP elliptique (4.5) dans tout l'espace $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$, on a $\partial\mathcal{O} = \emptyset$ et il faut rajouter des conditions de croissance à l'infini sur v et w, comme par exemple une croissance quadratique. De même, dans le cas d'une EDP parabolique sur le domaine $\mathcal{O} = [0, T[\times\mathbb{R}^n$, on a $\partial\mathcal{O} = \{T\} \times \mathbb{R}^n$, et il faudra aussi rajouter des conditions de croissance à l'infini sur v et w.

Remarque 4.3.3 Le principe de comparaison se formule aussi de manière équivalente : Si v est une sous-solution s.c.s. de viscosité de (4.5) et w est une sursolution s.c.i. de viscosité de (4.5) tel que $v^* \leq w_*$ sur $\partial\mathcal{O}$ alors

$$v \quad \leq \quad w \quad \text{sur } \bar{\mathcal{O}}.$$

Remarque 4.3.4 Comme pour les principes de comparaison classiques (pour les solutions continues), le principe de comparaison fort permet de comparer une sous-solution et une sursolution sur tout le domaine à partir de leur comparaison sur le bord du domaine. En particulier, ceci prouve l'unicité d'une solution de viscosité à (4.5) étant donné une condition au bord : $v^* = v_* = g$ sur $\partial\mathcal{O}$. En effet, si v et w sont deux solutions de viscosité de (4.5) avec la même condition au bord, alors on aura $v^* \leq w_*$ et $w^* \leq v_*$ sur $\mathcal{O}$. Comme par construction, on a déjà $v_* \leq v^*$ et $w_* \leq w^*$, ceci implique les égalités suivantes :

$$v_* \; = \; v^* \quad = \quad w_* \; = \; w^*,$$

et donc $v = w$ sur $\mathcal{O}$. On a aussi montré en même temps que v et w sont continues sur $\mathcal{O}$. Ainsi, le résultat de comparaison fort est un outil très puissant qui permet de montrer en plus qu'une solution à priori discontinue est en fait continue sur $\mathcal{O}$.

On donne ci-dessous quelques exemples de fonctions F pour lesquels il y a un principe de comparaison fort. Des résultats généraux avec leurs preuves peuvent être trouvées dans Crandall-Ishii et Lions (1992) ou Barles (1995).

• On considère d'abord le cas où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

(1) $F(x, w, p, M) = \beta w + H(x, p) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\sigma\sigma'(x)M)$ avec $\beta > 0$, $\sigma : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{N\times d}$ Lipschitzienne et $H : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(A1) $|H(x, p) - H(y, p)| \leq m(|x - y|(1 + |p|))$, où $m(z)$ tend vers zéro quand z tend vers zéro.

(A2) $H(x, p) \to +\infty$ quand $|p|$ tend vers l'infini, uniformément pour $x \in \mathcal{O}$.

(2) $F(x, w, p, M) = H(x, p)$ avec $H : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant **(A1)**, **(A2)** et les hypothèses supplémentaires :

(A3) $H(x, p)$ est convexe en p, pour tout $x \in \mathcal{O}$

(A4) Il existe une fonction $\varphi \in C^1(\mathcal{O})$, continue sur $\bar{\mathcal{O}}$, et $\delta > 0$ telle que $H(x, \nabla\varphi(x)) \leq -\delta$ sur $\mathcal{O}$.

• On considère maintenant le cas d'EDP (4.5) sur l'espace entier $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$ dans le cas elliptique, et $\mathcal{O} = [0, T[\times\mathbb{R}^n$, dans le cas parabolique, reliées à des problèmes de contrôle stochastique.

(3) $F(x,w,p,M) = \beta w + H_2(x,w,p,M)$ où $\beta > 0$ et H_2 est défini en (4.4) avec A compact et sous les hypothèses (3.2) et (3.3) sur b, σ et f.

(4) $F(t,x,w,p_t,p,M) = -p_t + H_1(t,x,p,M)$ où H_1 est défini en (4.3) avec A compact et sous les hypothèses (3.2) et (3.3) sur b, σ et f.

Dans chacun des cas (3) ou (4), il y a un principe de comparaison pour les solutions de viscosité dans la classe des fonctions à croissance quadratique. En particulier, ceci prouve l'unicité d'une solution de viscosité continue à croissance quadratique de l'EDP (4.5) pour F défini en (3) et l'unicité d'une solution de viscosité continue à croissance quadratique de l'EDP (4.5) avec une condition terminale donnée $v_*(T,.) = v^*(T,.) = g$ (à croissance quadratique), pour F défini en (4).

4.4 De la programmation dynamique aux solutions de viscosité

On revient aux problèmes de contrôle stochastique considérés au chapitre 3. On considère donc les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (4.1) et (4.2). Le but de cette section est d'utiliser la notion de solutions de viscosité pour relacher la condition de régularité sur la fonction valeur dans les propositions 3.3.1 et 3.3.2, et ainsi établir que la fonction valeur est solution de viscosité de l'EDP de Bellman associée. Comme dans la preuve pour le cas régulier, l'argument essentiel est le principe de la programmation dynamique.

Proposition 4.4.2 *1) Horizon fini : Supposons que la fonction valeur v soit localement bornée sur $[0,T[\times\mathbb{R}^n$, que la fonction f soit à croissance quadratique* (3.19)*, et que $f(.,.,a)$ soit continue en (t,x) pour tout $a \in A$. Alors v est une sous-solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) \quad \leq \quad 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

2) Horizon infini : Supposons que la fonction valeur v soit localement bornée, que la fonction f soit à croissance quadratique (3.20)*, et que $f(.,a)$ soit continue en x pour tout $a \in A$. Alors pour $\beta > 0$ assez grand, v est une sous-solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$\beta v(x) + H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)) \quad \leq \quad 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'un horizon fini. Soit $(\bar{t},\bar{x}) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C^2([0,T[,\mathbb{R}^n)$ une fonction test tel que :

$$0 = (v^* - \varphi)(\bar{t},\bar{x}) \quad = \quad \max_{(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n} (v^* - \varphi)(t,x). \tag{4.13}$$

Par définition de $v^*(\bar{t},\bar{x})$, il existe une suite (t_m,x_m) dans $[0,T[\times\mathbb{R}^n$ telle que

$$(t_m,x_m) \;\to\; (\bar{t},\bar{x}) \quad \text{et} \quad v(t_m,x_m) \;\to v^*(\bar{t},\bar{x}),$$

quand m tend vers l'infini. Par continuité de φ et (4.13), on a aussi que

$$\gamma_m \;:=\; v(t_m,x_m) - \varphi(t_m,x_m) \quad\to\quad 0,$$

quand m tend vers l'infini.

Soit $a \in A$, α le contrôle constant égal à a qui est bien dans $\mathcal{A}(t_m,x_m) = \mathcal{A}_{t_m}$ d'après la remarque 3.1.3. On note $X_s^{t_m,x_m}$ le processus d'état contrôlé associé. Soit τ_m le temps d'arrêt : $\tau_m = \inf\{s \geq t_m \;:\, |X_s^{t_m,x_m} - x_m| \geq \eta\}$ où $\eta > 0$ est une constante fixé. Soit (h_m) une suite strictement positive telle que :

$$h_m \;\to\; 0 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_m}{h_m} \;\to\; 0,$$

quand m tend vers l'infini. On applique la première partie (3.32) du principe de la programmation dynamique pour $v(t_m,x_m)$ à $\theta_m := \tau_m \wedge (t_m + h_m)$:

$$v(t_m,x_m) \quad\leq\quad E\left[\int_{t_m}^{\theta_m} f(s,X_s^{t_m,x_m},a)ds + v(\theta_m,X_{\theta_m}^{t_m,x_m})\right].$$

Contrairement à la preuve de la proposition 3.3.1, v n'est pas supposée régulière et on ne peut appliquer la formule d'Itô à v. En fait, on va utiliser la relation (4.13) qui implique que $v \leq v^* \leq \varphi$. On en déduit

$$\varphi(t_m,x_m) + \gamma_m \quad\leq\quad E\left[\int_{t_m}^{\theta_m} f(s,X_s^{t_m,x_m},a)ds + \varphi(\theta_m,X_{\theta_m}^{t_m,x_m})\right].$$

On applique alors la formule d'Itô à $\varphi(s,X_s^{t_m,x_m})$ entre t_m et θ_m, et on obtient après avoir noté comme dans la preuve de la proposition 3.3.1 que le terme d'intégrale stochastique s'annule en espérance :

$$\frac{\gamma_m}{h_m} \;+\; E\left[\frac{1}{h_m}\int_{t_m}^{\theta_m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathcal{L}^a\varphi - f\right)(s,X_s^{t_m,x_m},a)ds\right] \quad\leq\quad 0. \tag{4.14}$$

Par continuité p.s. de la trajectoire $X_s^{t_m,x_m}$, on a que pour m suffisamment grand ($m \geq N(\omega)$), $\theta_m(\omega) = t_m + h_m$, p.s. On en déduit par le théorème de la moyenne que la variable aléatoire sous le signe espérance de (4.14) converge p.s. vers $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) - \mathcal{L}^a\varphi(\bar{t},\bar{x}) - f(\bar{t},\bar{x},a)$ quand m tend vers l'infini. De plus, cette variable aléatoire est bornée par une constante indépendante de m. Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors en envoyant m vers l'infini dans (4.14) :

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) - \mathcal{L}^a\varphi(\bar{t},\bar{x}) - f(\bar{t},\bar{x},a) \quad\leq\quad 0,$$

et on conclut puisque $a \in A$ est arbitraire. □

Pour obtenir l'inégalité inverse de sursolution de l'équation de Bellman, on va utiliser la deuxième partie du principe de la programmation dynamique et se placer sous les conditions (3.37) (resp. (3.38)).

Proposition 4.4.3 *1) Horizon fini : Supposons que* (3.37) *soit vérifiée et que la fonction valeur v soit localement bornée sur* $[0,T[\times\mathbb{R}^n$. *Alors v est une sursolution de viscosité de l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$\begin{aligned} &\max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x))\right\} \\ \geq\ & 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.15}$$

2) Horizon infini : Supposons que (3.38) *soit vérifiée et que la fonction valeur v soit localement bornée sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors v est une sursolution de viscosité de :*

$$\max\left\{\beta v(x) + H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)), G_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x))\right\} \ \geq\ 0,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.16}$$

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'un horizon infini. Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction test tel que :

$$0 = (v_* - \varphi)(\bar{x}) \ = \ \min_{x\in\mathbb{R}^n}(v_* - \varphi)(x). \tag{4.17}$$

On va prouver le résultat par l'absurde en supposant donc au contraire que

$$\begin{aligned} &\beta\varphi(\bar{x}) + H_2(\bar{x},\nabla\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \ < \ 0, \\ \text{et}\quad & G_2(\bar{x},\nabla\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \ < \ 0. \end{aligned}$$

Alors par continuité de la fonction G_2, et celle de H_2 sur l'intérieur de son domaine, il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\beta\varphi(y) + H_2(y,\nabla\varphi(y), D^2\varphi(y)) \ \leq \ -\varepsilon,$$

pour tout $y \in B(\bar{x},\eta)$. Par définition de $v_*(\bar{x})$, il existe une suite x_m à valeurs dans $B(\bar{x},\eta)$ telle que

$$x_m \ \to \ \bar{x} \quad \text{et} \quad v(x_m) \ \to v_*(\bar{x}),$$

quand m tend vers l'infini. Par continuité de φ et (4.17), on a aussi que

$$\gamma_m \ := \ v(x_m) - \varphi(x_m) \ \ \to \ \ 0,$$

quand m tend vers l'infini. Soit (h_m) une suite strictement positive telle que :

$$h_m \ \to \ 0 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_m}{h_m} \ \to \ 0,$$

Alors, d'après la 2ème partie de la version forte de la programmation dynamique et en utilisant aussi (4.17), il existe $\hat{\alpha}^m \in \mathcal{A}(x_m)$, tel que

$$\varphi(x_m) + \gamma_m + \frac{\varepsilon h_m}{2} \quad \geq \quad E\left[\int_0^{\theta_m} e^{-\beta s} f(X_s^{x_m}, \hat{\alpha}_s^m) ds + e^{-\beta\theta_m}\varphi(X_{\theta_m}^{x_m})\right],$$

où l'on a choisi $\theta_m := \tau_m \wedge h_m$, $\tau_m = \inf\{s \geq 0 \ : |X_s^{x_m} - x_m| \geq \eta'\}$ et $0 < \eta' < \eta$. Puisque (x_m) tend vers $\bar{x}$, on peut toujours supposer que $B(x_m, \eta') \subset B(\bar{x}, \eta)$, de telle sorte que pour $0 \leq s < \theta_m$, $X_s^{x_m} \in B(\bar{x}, \eta)$. Ici $X_s^{x_m}$ correspond à la diffusion contrôlée par $\hat{\alpha}^m$. Par la formule d'Itô à $e^{-\beta s}\varphi(X_s^{x_m})$ entre $s = 0$ et $s = \theta_m$, on obtient comme dans la preuve de la proposition 3.3.2 que le terme d'intégrale stochastique est nul en espérance, d'où :

$$0 \quad \leq \quad \frac{\gamma_m}{h_m} + \frac{\varepsilon}{2} \ + \ E\left[\frac{1}{h_m}\int_0^{\theta_m} L(X_s^{x_m}, \hat{\alpha}_s^m) ds\right], \tag{4.18}$$

avec

$$L(x,a) \quad = \quad \beta\varphi(x) - \mathcal{L}^a\varphi(x) - f(x,a).$$

En remarquant que pour $0 \leq s < \theta_m$:

$$\begin{aligned} L(X_s^{x_m}, \hat{\alpha}_s^m) \quad &\leq \quad \beta\varphi(X_s^{x_m}) + H_2(X_s^{x_m}, \nabla\varphi(X_s^{x_m}), D^2\varphi(X_s^{x_m})) \\ &\leq \quad -\varepsilon, \end{aligned}$$

on en déduit d'après (4.18) que

$$0 \quad \leq \quad \frac{\gamma_m}{h_m} + \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h_m}E[\theta_m]\right). \tag{4.19}$$

Comme dans la preuve de la proposition (3.3.2), on voit que $\frac{1}{h_m}E[\theta_m]$ tend vers 1 quand m tend vers l'infini. On obtient ainsi la contradiction voulue en faisant tendre m vers l'infini dans (4.19). □

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient le résultat principal de cette section.

Théorème 4.4.1 *Sous les conditions des propositions 4.4.2 et 4.4.3, la fonction valeur v est solution de viscosité de l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*
1) Horizon fini :

$$\begin{aligned} &\max\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)), G_1(t,x,\nabla_x v(t,x), D_x^2 v(t,x))\right\} \\ = \quad &0, \quad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.20}$$

2) Horizon infini :

$$\max\left\{\beta v(x) + H_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x)), G_2(x,\nabla v(x), D^2 v(x))\right\} \quad = \quad 0, \ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.21}$$

Ce théorème combiné avec les résultats de comparaison forts montrent donc que la fonction valeur v d'un problème de contrôle stochastique est caractérisée comme l'unique solution de viscosité (avec des conditions de croissance à l'infini appropriées) de l'équation de Bellman associée avec une condition terminale $v_* = v^*$. La théorie des solutions de viscosité prouve toute sa puissance, ici en partuculier dans le cadre des problèmes de contrôle stochastique. Elle peut être utilisée comme une méthode de vérification où il "suffira" de résoudre l'équation de Bellman et de déterminer la condition terminale pour calculer la fonction valeur. On donne une application dans la section suivante.

4.5 Application : calcul du coût de surréplication dans un modèle à volatilité incertaine

On considère la diffusion contrôlée :

$$dX_s = \alpha_s X_s dW_s, \quad t \leq s \leq T,$$

où le processus de contrôle (α_s) est $(\mathcal{F}_s)$-adapté, à valeurs dans $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $0 \leq \underline{a} \leq \bar{a} \leq +\infty$, et $E[\int_t^T |\alpha_s|^2 ds] < +\infty$. Pour éviter les cas triviaux dégénérés, on suppose $\bar{a} > 0$ et $\underline{a} \neq +\infty$. On note par $\mathcal{A}_t$ l'ensemble de tels processus de contrôles. Comme d'habitude, on se ramène au cas des hypothèses générales en faisant le changement de variable $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$. Notons que lorsque $x = 0$, alors $X_s^{t,x} = 0$ pour tout $s \geq t$. En finance, α représente la volatilité incertaine du prix de l'action X. Etant donné une fonction g s.c.i. à croissance linéaire, représentant le payoff d'une option, on cherche à calculer son coût de sur-réplication donné par :

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} E\left[g(X_T^{t,x})\right], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*. \tag{4.22}$$

Notons que le processus positif $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ est une surmartingale pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_t$. On en déduit qu'il existe C constante positive telle que :

$$|v(t,x)| \leq C(1+x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*.$$

Donc v est aussi à croissance linéaire et est en particulier localement bornée sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+^*$.

L'Hamiltonien du problème de maximisation (4.22) est donné par :

$$H(x,M) = \inf_{a \in [\underline{a},\bar{a}]} \left\{ -\frac{1}{2} a^2 x^2 M \right\}, \quad (x,M) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

On va distinguer deux cas selon que la volatilité maximale est bornée ou non.

Cas : $\bar{a} < \infty$.

Dans ce cas, l'Hamiltonien est fini et continu sur tout $(x, M) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et est donné par :

$$H(x, M) = -\frac{1}{2}\hat{a}^2(M)x^2 M,$$

avec

$$\hat{a}(M) = \begin{cases} \bar{a} & \text{si } M \geq 0 \\ \underline{a} & \text{si } M \leq 0. \end{cases}$$

D'après le théorème 4.4.1 et en utilisant les résultats de comparaison, on obtient la caractérisation suivante :

Théorème 4.5.2 *Supposons $\bar{a} < +\infty$ et g continue. Alors v est l'unique solution de viscosité à croissance linéaire, continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+^*$, de l'équation dite de Black-Scholes-Barenblatt :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\hat{a}^2(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}_+^*, \tag{4.23}$$

satisfaisant la condition terminale :

$$v(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.24}$$

Preuve. On sait d'après le théorème 4.4.1 que v est solution de viscosité de (4.23). Pour caractériser v, il faut déterminer $v_*(T, .)$ et $v^*(T, .)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Soit (t_n, x_n) une suite dans $[0, T[\times \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$(t_n, x_n) \to (T, x) \quad \text{et} \quad v(t_n, x_n) \to v_*(T, x),$$

quand n tend vers l'infini. Soit $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ et $X_s^{t_n, x_n}$ la diffusion contrôlée associée au contrôle constant a. On a donc $v(t_n, x_n) \geq E[g(X_T^{t_n, x_n})]$. Dans la suite C désigne une constante positive générique indépendante de n. Comme g est à croissance linéaire, on a :

$$\begin{aligned} E\left|g(X_T^{t_n, x_n})\right|^2 &\leq C(1 + E|X_T^{t_n, x_n}|^2) \\ &\leq C(1 + x^2 e^{a^2 T}). \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\{g(X_T^{t_n, x_n}), n \geq 1\}$ est borné dans L^2, donc est uniformément intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée, la continuité de g et p.s. de X_T en ses données initiales (t, x) que

$$v_*(T, x) \geq g(x). \tag{4.25}$$

D'autre part, considérons une suite (t_n, x_n) dans $[0, T[\times \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$(t_n, x_n) \ \rightarrow \ (T, x) \quad \text{et} \quad v(t_n, x_n) \ \rightarrow v^*(T, x),$$

quand n tend vers l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $\hat{\alpha}^n \in \mathcal{A}_{t_n}$ tel que :

$$v(t_n, x_n) \quad \leq \quad E[g(X_T^{t_n, x_n})] + \varepsilon. \tag{4.26}$$

Ici $X_s^{t_n, x_n}$ est la diffusion contrôlée associée au contrôle $\hat{\alpha}^n$. Comme A est compact borné par $\bar{a}$, on a :

$$\begin{aligned} E\left|g(X_T^{t_n, x_n})\right|^2 & \leq \quad C(1 + E|X_T^{t_n, x_n}|^2) \\ & \leq \quad C(1 + x^2 e^{\bar{a}^2 T}). \end{aligned}$$

On obtient donc comme précédemment par le théorème de convergence dominée, en faisant tendre n vers l'infini, puis ε vers zéro dans (4.26), et avec (4.25) :

$$v_*(T, x) \ = \ v^*(T, x) \quad = \quad g(x).$$

On conclut avec le principe de comparaison fort, en notant aussi qu'on a la continuité jusqu'en $t = T$ puisque $v(T, x) = g(x)$. $\square$

Remarque 4.5.5 Lorsque $\underline{a} > 0$, et g est assez régulière, il y a existence et unicité d'une solution régulière à l'EDP de Black-Scholes-Barenblatt (4.23) avec la condition de Cauchy (4.24). C'est une conséquence du théorème 3.4.5 en notant que la condition d'ellipticité uniforme (3.54) est obtenue après le changement de variable $x \rightarrow \ln x$.

Remarque 4.5.6 Si g est convexe, alors la fonction :

$$w(t, x) \quad = \quad E\left[g(\hat{X}_T^{t,x})\right], \quad (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}_+^*,$$

où $\{\hat{X}_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ est la solution de l'EDS :

$$d\hat{X}_s \quad = \quad \bar{a}\hat{X}_s dW_s, \quad t \leq s \leq T, \quad \hat{X}_t \ = \ x,$$

est aussi convexe en x. De plus, w est solution régulière de l'équation de Black-Scholes :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\bar{a}^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad = \quad 0, \quad (t, x) \ \in [0, T[\times \mathbb{R}_+^*,$$

et satisfait la condition terminale $w(T, x) = g(x)$. Comme $\hat{a}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = \bar{a}$, ceci implique que w est en fait aussi solution de l'équation (4.23), et donc par unicité que $w = v$. On a une remarque analogue lorsque g est concave.

Cas : $\bar{a} = \infty$.
Dans ce cas l'Hamiltonien est donné par :

$$H(x, M) \quad = \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\underline{a}^2 x^2 M & \text{si } -M \geq 0 \\ -\infty & \text{si } -M < 0. \end{cases}$$

D'après le théorème 4.4.1, la fonction v est solution de viscosité de :

$$\min\left\{-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\underline{a}^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} \quad = \quad 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}_+^*. \tag{4.27}$$

Ceci prouve en particulier que v est une sursolution de viscosité de $-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}_+^*$. Le lemme général suivant montre alors que pour tout $t \in [0,T[$, $v(t,.)$ est sursolution de viscosité de $-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,.) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est une propriété triviale dans le cas de solutions régulières mais plus délicate à prouver avec la notion plus faible de solution de viscosité.

Lemme 4.5.2 *Soient $\mathcal{O}_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts. Soit $v : \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, sursolution s.c.i. de viscosité de :*

$$F(x, y, \nabla_y v(x,y), D_y^2 v(x,y)) \quad \geq \quad 0, \qquad \textit{sur } \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2,$$

où $F : \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie la condition d'ellipticité (4.6). *Alors pour tout $x_0 \in \mathcal{O}_1$, la fonction $v(x_0,.)$ est une sursolution s.c.i. de viscosité de :*

$$F(x_0, y, \nabla_y v(x_0,y), D_y^2 v(x_0,y)) \quad \geq \quad 0, \qquad \textit{sur } \mathcal{O}_2.$$

Preuve. Soit $x_0 \in \mathcal{O}_1$ fixé, $u(y) := v(x_0, y)$ et $\varphi \in C^2(\mathcal{O}_2)$, $y_0 \in \mathcal{O}_2$ tel que :

$$0 = (u - \varphi)(y_0) \quad < \quad (u-\varphi)(y), \quad \forall y \in \mathcal{O}_2 \setminus \{y_0\}, \tag{4.28}$$

i.e. y_0 est un minimum strict de $u - \varphi = u_* - \varphi$ (car v est s.c.i). On doit montrer que :

$$F(x_0, y_0, \nabla\varphi(y_0), D^2\varphi(y_0)) \quad \geq \quad 0. \tag{4.29}$$

Pour cela, considérons la suite de fonctions dans $C^2(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$:

$$\psi_n(x,y) \quad = \quad \varphi(y) - n|x - x_0|^2.$$

Soit $I_1 \times I_2$ un voisinage compact de (x_0, y_0) dans $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. La fonction $v - \psi_n$ étant s.c.i, il existe $(x_n, y_n) \in I_1 \times I_2$ tel que :

$$(v - \psi_n)(x_n, y_n) \quad = \quad \min_{I_1 \times I_2} (v - \psi_n).$$

Par compacité de $I_1 \times I_2$, la suite (x_n, y_n) converge (à une sous-suite près) vers un élément $(\bar{x}, \bar{y}) \in I_1 \times I_2$. D'après la définition de ψ_n et de (x_n, y_n), on a :

$$\begin{aligned} v(x_n, y_n) - \varphi(y_n) &\leq (v - \psi_n)(x_n, y_n) \\ &\leq (v - \psi_n)(x_0, y_0) \;=\; u(y_0) - \varphi(y_0). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini et puisque v est s.c.i, on obtient :

$$\begin{aligned} v(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{y}) &\leq v(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{y}) + \liminf_{n \to +\infty} n|x_n - x_0|^2 \\ &\leq u(y_0) - \varphi(y_0). \end{aligned}$$

Ceci implique que $\bar{x} = x_0$ et ensuite que :

$$(u - \varphi)(\bar{y}) \;=\; v(x_0, \bar{y}) - \varphi(\bar{y}) \;\leq\; (u - \varphi)(y_0).$$

D'après (4.28), ceci prouve que $\bar{y} = y_0$ et donc finalement que

$$(x_n, y_n) \;\to\; (x_0, y_0),$$

quand n tend vers l'infini. De plus, par la propriété de sursolution de viscosité de v, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(x_n, y_n, \nabla_y \psi_n(x_n, y_n), D_y^2 \psi_n(x_n, y_n)) \\ &= F(x_n, y_n, \nabla \varphi(y_n), D^2 \varphi(y_n)), \end{aligned}$$

et on obtient le résultat voulu (4.29) en faisant tendre n vers l'infini. □

Dans le cas où v est régulière, on aura aussi que $v(t, .)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in [0, T[$. Le lemme suivant montre que c'est encore vraie avec la notion de viscosité.

Lemme 4.5.3 *Soit $\mathcal{O}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $w : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée. Alors w est une sursolution s.c.i. de viscosité de $-D^2 w \geq 0$ sur $\mathcal{O}$ si et seulement si w est concave sur $\mathcal{O}$.*

Preuve.
1. Supposons d'abord que w est une sursolution s.c.i. de viscosité de $-D^2 w \geq 0$ sur $\mathcal{O}$. Soit $x_0 < x_1$ deux points quelconques de $\mathcal{O}$. Puisque w est localement bornée, w est bornée inférieurement sur $[x_0, x_1]$, et on peut donc supposer, quite à ajouter une constante à w (ce qui ne changera pas la proprété de sursolution de w), que $w \geq 0$ sur $[x_0, x_1]$. On voit alors aisément que w est une sursolution de viscosité de $\varepsilon^2 w - D^2 w \geq 0$ sur (x_0, x_1) pour tout $\varepsilon > 0$. Considérons l'équation :

$$\varepsilon u - D^2 u \;=\; 0 \quad \text{sur } (x_0, x_1),$$

avec la condition de bord

$$\begin{aligned} u(x_0) &= w(x_0)(= w_*(x_0)) \\ u(x_1) &= w(x_1)(= w_*(x_1)). \end{aligned}$$

La solution de ce problème est régulière sur $[x_0, x_1]$ et est clairement donnée par :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{w(x_0)\left[e^{\varepsilon(x_1-x)}-1\right] + w(x_1)\left[e^{\varepsilon(x-x_0)}-1\right]}{e^{\varepsilon(x_1-x_0)}-1}.$$

Par le principe de comparaison, on a $w(x) \geq u_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in [x_0, x_1]$. En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit que :

$$\frac{w(x)-w(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{w(x_1)-w(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \forall x \in (x_0, x_1),$$

ce qui prouve la concavité de w.

2. Supposons réciproquement que w est une fonction concave sur $\mathcal{O}$. Notons en particulier que w est continue sur $\mathcal{O}$. Soit $\bar{x} \in \mathcal{O}$ et $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ tel que

$$0 = (w-\varphi)(\bar{x}) = \min_{\mathcal{O}}(w-\varphi).$$

Alors pour tout $h > 0$ assez petit tel que $\bar{x}-h$ et $\bar{x}+h \in \mathcal{O}$, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi(\bar{x}+h)+\varphi(\bar{x}-h)-2\varphi(\bar{x})}{h^2} &\geq -\frac{w(\bar{x}+h)+w(\bar{x}-h)-2w(\bar{x})}{h^2} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers zéro, on obtient $-D^2\varphi(\bar{x}) \geq 0$ qui est la propriété de sursolution requise. □

On note par g^{conc} l'envelope concave de g, i.e. la plus petite fonction concave majorant g. Notons que puisque g est à croissance linéaire, il en est de même de g^{conc}. On a alors la caractérisation explicite suivante de la fonction v.

Théorème 4.5.3 *Supposons $\bar{a} = +\infty$ et g borné inférieurement. Alors $v = w$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}_+^*$ où*

$$w(t,x) = E\left[g^{conc}(\hat{X}_T^{t,x})\right], \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}_+^*, \tag{4.30}$$

et $\{\hat{X}_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ est la solution de l'EDS :

$$d\hat{X}_s = \underline{a}\hat{X}_s dW_s, \quad t \leq s \leq T, \quad \hat{X}_t = x.$$

Preuve.
1. Montrons d'abord que v est s.c.i. sur $[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$. Soit (t_n,x_n) une suite de $[0,T[\times\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$. Comme g est s.c.i. et borné inférieurement, et par la continuité p.s. de $X_T^{t,x}$ en ses données initiales (t,x) pour tout contrôle $\alpha\in\mathcal{A}_0$, on a par le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} v(t_n,x_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} E[g(X_T^{t_n,x_n})]\\ &\geq E[g(X_T^{t,x})],\end{aligned}$$

et donc $\liminf_{n\to+\infty} v(t_n,x_n)\geq v(t,x)$.
2. D'après (4.27) et le lemme 4.5.2, pour tout $t\in[0,T[$, $v(t,.)$ est une sursolution de viscosité de $-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,.)\geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le lemme 4.5.3, ceci signifie que $v(t,.)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x,y\in\mathbb{R}_+^*$,

$$v\left(t,\frac{x+y}{2}\right) \;\geq\; \frac{1}{2}v(t,x)+\frac{1}{2}v(t,y).$$

En passant à la liminf quand t tend vers T^-, on obtient :

$$v_*\left(T,\frac{x+y}{2}\right) \;\geq\; \frac{1}{2}v_*(T,x)+\frac{1}{2}v_*(T,y),$$

ce qui signifie que $v_*(T,.)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus d'après la s.c.i. de v sur $[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$, on a $v_*(T,x)\geq v(T,x)=g(x)$. On en déduit que :

$$v_*(T,x) \;\geq\; g^{conc}(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*. \tag{4.31}$$

3. Soit $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{A}_{t,b}$ le sous ensemble de $\mathcal{A}_t$ consitué des contrôles bornés p.s. sur $[t,T]$. On a donc $v(t,x)\geq\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_{t,b}}E[g(X_T^{t,x})]$. Réciproquement, étant donné $\hat\alpha\in\mathcal{A}_t$ quelconque, on pose pour $n\in\mathbb{N}$, $\alpha^n:=\hat\alpha 1_{|\hat\alpha|\leq n}\in\mathcal{A}_{t,b}$. On note par $\hat X_s^{t,x}$ (resp. X_s^n), $t\leq s\leq T$, le processus de diffusion contrôlé par $\hat\alpha$ (resp. α^n). i.e. :

$$\begin{aligned}\hat X_s^{t,x} &= x\exp\left(\int_t^s \hat\alpha_u dW_u-\frac{1}{2}\int_t^s|\hat\alpha_u|^2du\right),\\ X_s^n &= x\exp\left(\int_t^s \alpha_u^n dW_u-\frac{1}{2}\int_t^s|\alpha_u^n|^2du\right).\end{aligned}$$

Alors X_T^n converge p.s. vers $\hat X_T^{t,x}$ quand n tend vers l'infini, et par le lemme de Fatou, on obtient :

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_{t,b}} E[g(X_T^{t,x})] &\geq \liminf_{n\to+\infty} E[g(X_T^n)]\\ &\geq E[g(\hat X_T^{t,x})].\end{aligned}$$

Puisque $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_t$ est arbitraire, on a l'inégalité réciproque voulue d'où :

$$v(t,x) \;=\; \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,b}} E[g(X_T^{t,x})].$$

En remarquant que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_{t,b}$, le processus $X_s^{t,x}$, $t \leq s \leq T$, est une martingale, on a par l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} v(t,x) &\leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,b}} E[g^{conc}(X_T^{t,x})] \\ &\leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,b}} g^{conc}\left(E[X_T^{t,x}]\right) \;=\; g^{conc}(x). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ceci implique en particulier que $v^*(T,x) \leq g^{conc}(x)$, et montre avec la relation (4.31) que la condition terminale pour le problème de contrôle stochastique (4.22) est :

$$v^*(T,x) \;=\; v_*(T,x) \;=\; g^{conc}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.33}$$

4. La fonction g^{conc} étant continue et à croissance linéaire, on montre par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 4.5.2, que w donné par (4.30) est continue en T avec $w^*(T,x) = w_*(T,x) = g^{conc}(x)$. Comme cas particulier du théorème 4.4.1 et par un résultat d'unicité fort, on en déduit que w est l'unique solution de viscosité à croissance linéaire, continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+^*$ de l'équation de Black-Scholes :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\underline{a}^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \;=\; 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^*, \tag{4.34}$$

avec la condition terminale :

$$w^*(T,x) \;=\; w_*(T,x) \;=\; g^{conc}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.35}$$

D'après (4.27), v est sursolution s.c.i. de viscosité de (4.34). Comme v et w vérifient la même condition terminale, on en déduit par le principe de comparaison fort que :

$$v \;\geq\; w \quad \text{sur } [0,T[\times \mathbb{R}_+^*. \tag{4.36}$$

5. La fonction g^{conc} étant concave, il en est de même pour la fonction $w(t,.)$. D'après le lemme 4.5.3, ceci implique que $w(t,.)$ est une sursolution de viscosité de $-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,.) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in [0,T[$. A fortiori, on en déduit que w est sursolution de viscosité de

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) \;\geq\; 0, \quad \text{sur } [0,T[\times \mathbb{R}_+^*.$$

En combinant avec (4.34), ceci prouve que w est une solution de viscosité de la même équation que v, i.e. :

$$\min\left\{-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\underline{a}^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} \;=\; 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^*. \tag{4.37}$$

De plus comme v et w satisfont la même condition terminale, on peut conclure que $v = w$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}_+^*$ par un résultat d'unicité fort sur l'inéquation variationnelle (4.37). On donne ici un argument qui n'utilise pas directement un tel résultat d'unicité fort. Lorsque $\underline{a} = 0$, on a $w = g^{conc} \geq v$ d'après (4.32) et donc l'égalité voulue avec (4.36). Lorsque $\underline{a} > 0$, la fonction w est en fait régulière $C^{1,2}([0,T[,\mathbb{R}_+^*) \cap C^0([0,T] \times \mathbb{R}_+^*)$. En appliquant alors la formule d'Itô à $w(s, X_s^{t,x})$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_t$ (après avoir éventuellement localisé pour annuler en espérance le terme d'intégrale stochastique), on obtient :

$$E[g^{conc}(X_T^{t,x})] \quad = \quad w(t,x) + E\left[\int_t^T \frac{\partial w}{\partial t}(s, X_s^{t,x}) + (\alpha_s)^2 (X_s^{t,x})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s,, X_s^{t,x})\, ds\right].$$

Comme w est concave et $\alpha_s \geq \underline{a}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} E[g(X_T^{t,x})] &\leq E[g^{conc}(X_T^{t,x})] \\ &\leq w(t,x) + E\left[\int_t^T \frac{\partial w}{\partial t}(s, X_s^{t,x}) + \underline{a}^2 (X_s^{t,x})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s,, X_s^{t,x})\, ds\right] \;=\; w(t,x), \end{aligned}$$

puisque w est solution de (4.34). Ceci étant valide pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_t$, on conclut que $v \leq w$ et finalement :

$$v \quad = \quad w \quad \text{sur } [0,T[\times\mathbb{R}_+^*.$$

□

Remarque 4.5.7 Le théorème précédent montre donc que le coût de surréplication dans un modèle à volatilité non bornée est égal au prix de Black-Scholes d'un payoff "concavifié" et pour la volatilité inférieure $\underline{a}$. Il n'y a pas de contrôle optimal lorsque $\bar{a} = +\infty$ et l'effet de la volatilité maximale non bornée est de concavifier la fonction valeur de ce problème de contrôle stochastique singulier.

Remarque 4.5.8 On a vu que lorsque $\underline{a} = 0$ alors $v(t,.) = g^{conc}$ pour tout $t \in [0,T[$. Cette dernière relation est aussi vraie lorsque g est convexe. On sait déjà d'après (4.32) que $v \leq g^{conc}$. De plus, par l'inégalité de Jensen, on voit d'après (4.22) que $v(t,x) \geq g(x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*$, et donc par concavité de $v(t,.)$ que $v(t,x) \geq g^{conc}(x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}_+^*$.

4.6 Références

- Barles G. (1995) : Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi, Springer Verlag, Mathématiques et Applications.

- Crandall M., Ishii. H et P.L. Lions (1992) : "User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential "Equations", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27, 1-67.
- Fleming W. et M. Soner (1993) : Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer Verlag.
- Lions P.L. (1983) : "Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations", Comm. P.D.E, 8, Part I, 1101-1134, Part II, 1229-1276

Bibliographie

[1] Barles G. (1995) : Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi, Springer Verlag, Mathématiques et Applications.

[2] Bensoussan A. et J.L. Lions (1978) : Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod.

[3] Crandall M., Ishii. H et P.L. Lions (1992) : "User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27, 1-67.

[4] Demange G. et J.C. Rochet (1992) : Méthodes mathématiques de la finance, Economica.

[5] Duffie D. (1992) : Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton, University Press.

[6] El Karoui (1981) : Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique, Lect. Notes in Math., 816, Springer Verlag.

[7] Fleming W. et R. Rishel (1975) : Deterministic and stochastic optimal control, Springer Verlag.

[8] Fleming W. et M. Soner (1993) : Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer Verlag.

[9] Friedman A. (1975) : Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. 1, Academic Press.

[10] Jacka S. (1993) : "Local times, optimal stopping and semimartingales", Annals of Probability, 21, 329-339.

[11] Kamien M. et N. Schwartz (1981) : Dynamic optimization, North Holland.

[12] Krylov N. (1980) : Controlled Diffusion Processes, Springer Verlag

[13] Krylov N. (1987) : Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of Second Order, Boston, D. Reidel.

[14] Kushner H. et P. Dupuis (1992) : Numerical methods for stochastic control problems in continuous time, Springer Verlag.

[15] Lions P.L. (1983) : "Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations"", Comm. P.D.E, 8, Part I, 1101-1134, Part II, 1229-1276

[16] Oksendal B. (1998) : Stochastic differential equations : an introduction with applications, 5th edition, Springer Verlag.

[17] Shiryayev (1978) : Optimal stopping rules, Springer Verlag.