

Méthodes de quantification optimale et Applications en Finance

Huyên PHAM

Université Paris 7

Laboratoire de Probabilités et
Modèles aléatoires, CNRS UMR 7599
pham@math.jussieu.fr

Version : 2006-2007.

Master 2ème année, Paris 7, Statistique et Modèles Aléatoires en Economie et
Finance

Table des matières

Préface	3
1 Quantification vectorielle d'une loi de probabilité	4
1.1 Mosaique de Voronoi	4
1.2 Quantification de Voronoi et distorsion optimale	7
1.3 Asymptotique de l'erreur de quantification	12
1.4 Algorithmes de recherche d'un quantifieur optimal de Voronoi	14
1.4.1 Méthode du point fixe de Lloyd (en dimension 1)	14
1.4.2 Méthode du gradient déterministe (en dimension 1)	15
1.4.3 Méthode du gradient stochastique : algorithme de Kohonen	18
1.5 Application à l'intégration numérique et aux options européennes	23
2 Quantification d'une chaîne de Markov et applications	26
2.1 Quantification marginale	27
2.1.1 Méthode	27
2.1.2 Exemple	30
2.1.3 Quantification optimale	31
2.2 Application à l'arrêt optimal et aux options américaines	31
3 Filtrage et quantification	35
3.1 Filtrage linéaire	35
3.1.1 Rappel sur les variables gaussiennes	35
3.1.2 Filtre de Kalman-Bucy	37
3.2 Filtrage non linéaire	41
3.2.1 Description du modèle	41
3.2.2 Equation du filtre	43
3.2.3 Approximation par quantification	46
3.3 Applications et exemples	53
3.3.1 Application : Valorisation d'options européennes en information partielle	53

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
3.3.2 Exemples	53
Bibliographie	55

Préface

Le terme “quantification” a ses origines en théorie du signal et de l’information et était utilisé par les ingénieurs depuis les années 50. Dans ce contexte, la quantification signifie la discrétisation d’un signal continu par un nombre fini N de codes (ou quantifieurs). Pour permettre une transmission efficace du signal, il est donc primordial d’optimiser la location géométrique de ces codes et d’évaluer l’erreur résultante. C’est le problème mathématique dit de la quantification optimale : trouver la meilleure approximation d’une loi de probabilité continue par une loi de probabilité discrète avec un nombre donné N de points supportant cette loi. D’un point de vue numérique, la quantification optimale est longtemps restée limitée au cas de signaux unidimensionnels car les procédures d’optimisation, essentiellement déterministes, devenaient trop lourdes en dimension supérieure. Grâce à l’évolution et la puissance des ordinateurs permettant une réduction drastique des temps de calcul par les méthodes de Monte-Carlo, les méthodes de quantification optimale ont été récemment réétudiées dans le domaine des probabilités numériques et plus particulièrement dans les applications en finance où intervient naturellement des questions de grande dimension.

Ce cours est une introduction aux méthodes de quantification optimale avec en vue les applications en finance. On commence par exposer les fondements mathématiques de la quantification quadratique. On développera ensuite les algorithmes de recherche d’un quantifieur optimal et on donnera plusieurs applications en finance : calcul d’options européennes et d’options américaines. On étudiera aussi le filtrage et les méthodes d’approximation par quantification, avec comme applications les modèles à volatilité stochastique.

Chapitre 1

Quantification vectorielle d'une loi de probabilité

Dans la suite, $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et on note $(\cdot|\cdot)$ ou parfois \cdot le produit scalaire associé. L'intérieur d'une partie A de \mathbb{R}^d est notée $\text{int}(A)$ et son adhérence $\text{Adh}(A)$. On note $\#A$ le cardinal d'un ensemble A de \mathbb{R}^d et 1_A la fonction indicatrice de A . Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note $L^2(\Omega, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des variables aléatoires X à valeurs dans \mathbb{R}^d telles que $\mathbb{E}|X|^2 < +\infty$ et on note $\|X\|_2 = (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}}$. On notera aussi \mathbb{P}_X la loi de probabilité de X et λ_d la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d . On note $\text{Supp}(\mu)$ le support topologique d'une mesure μ sur \mathbb{R}^d et $\text{Conv}(\text{Supp}(\mu))$ son enveloppe convexe fermée.

1.1 Mosaïque de Voronoi

Soit $x = (x_1, \dots, x_N)$ un N -uplet de points x_i dans \mathbb{R}^d qu'on identifiera souvent avec la grille (partie finie) $\{x_1, \dots, x_N\}$ de N points dans \mathbb{R}^d . La famille d'ensembles de \mathbb{R}^d définis par :

$$\bar{C}_i(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| = \min_{j=1, \dots, N} |u - x_j| \right\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

est appelée mosaïque (ou diagramme) de Voronoi de x . Les $\bar{C}_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, sont les cellules fermées de Voronoi engendrées par x . Ainsi, $\bar{C}_i(x)$ consiste en tous les points u de \mathbb{R}^d tels que x_i est le plus proche de u parmi les points x_j de x ; voir figure 1.1.

Il est clair qu'une mosaïque de Voronoi couvre \mathbb{R}^d , i.e.

$$\cup_{i=1}^N \bar{C}_i(x) = \mathbb{R}^d,$$

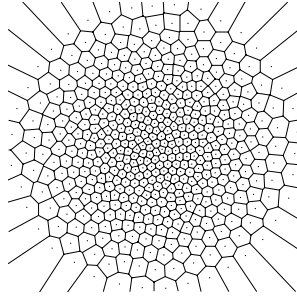


FIG. 1.1 – Une mosaïque de Voronoi dans \mathbb{R}^2 avec $N = 500$ points..

et que les cellules de Voronoi $\bar{C}_i(x)$ sont fermées dans \mathbb{R}^d . On introduit aussi les cellules ouvertes de Voronoi dans \mathbb{R}^d :

$$C_i^o(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| < \min_{x_j \neq x_i} |u - x_j| \right\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

qui sont clairement ouvertes dans \mathbb{R}^d et disjointes deux à deux mais ne couvrent pas \mathbb{R}^d . On appelle partition de Voronoi de x toute partition $C_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, de \mathbb{R}^d , i.e. $\cup_{i=1}^N C_i(x) = \mathbb{R}^d$ et $C_i(x) \cap C_j(x) = \emptyset$ si $x_i \neq x_j$, telle que :

$$C_i(x) \subset \bar{C}_i(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Notons qu'on a alors aussi

$$C_i^o(x) \subset C_i(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Nous montrons d'abord quelques propriétés intuitives sur les cellules de Voronoi.

Proposition 1.1.1 *Les cellules de Voronoi vérifient*

- (a) $\bar{C}_i(x)$ et $C_i^o(x)$ sont convexes dans \mathbb{R}^d .
- (b) $\text{int}(\bar{C}_i(x)) = C_i^o(x)$, $\text{Adh}(C_i^o(x)) = \bar{C}_i(x)$, $\partial C_i(x) = \partial \bar{C}_i(x) = \partial C_i^o(x)$.
- (c) $\lambda_d(\partial C_i(x)) = 0$.

Preuve. (a) On définit le demi-espace médian entre x_i et x_j par :

$$H_{ij}(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| \leq |u - x_j| \right\},$$

et l'hyperplan séparateur entre x_i et x_j :

$$S_{ij}(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| = |u - x_j| \right\}.$$

On a donc par définition

$$\bar{C}_i(x) = \bigcap_{j=1}^N H_{ij}(x). \quad (1.3)$$

En notant que par définition de la norme euclidienne, on a

$$H_{ij}(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \left(x_i - x_j |u - \frac{1}{2}(x_i + x_j)\right) \geq 0 \right\},$$

il est clair que $H_{ij}(x)$ est convexe et donc aussi $\bar{C}_i(x)$ d'après (1.3). De même, en écrivant que

$$\begin{aligned} C_i^o(x) &= \bigcap_{x_j \neq x_i} \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| < |u - x_j| \right\} \\ &= \bigcap_{x_j \neq x_i} \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \left(x_i - x_j |u - \frac{1}{2}(x_i + x_j)\right) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

on a la convexité de $C_i^o(x)$.

(b) Vérifions que pour tout $x_j \neq x_i$, $\lambda \in]0, 1[$ et $u \in H_{ij}(x)$, on a

$$\lambda u + (1 - \lambda)x_i \in \left\{ v \in \mathbb{R}^d : |v - x_i| < |v - x_j| \right\}. \quad (1.4)$$

En effet, posons $v = \lambda u + (1 - \lambda)x_i$, i.e. $v - x_i = \lambda(u - x_i)$. v est dans $H_{ij}(x)$ par convexité de cet ensemble. Supposons alors par l'absurde que $|v - x_i| = |v - x_j|$. Alors, en utilisant le fait que pour tous vecteurs $x \neq y$ avec $|x| = |y|$, on a $|(1 - \lambda)x + \lambda y| < |x|$, on en déduit :

$$\begin{aligned} |u - x_j| &= \left| \frac{1}{\lambda}(v - x_i) - (x_j - x_i) \right| = \frac{1}{\lambda} |v - x_i - \lambda(x_j - x_i)| \\ &= \frac{1}{\lambda} |(1 - \lambda)(v - x_i) + \lambda(v - x_j)| \\ &< \frac{1}{\lambda} |v - x_i| = |u - x_i| \leq |u - x_j|, \end{aligned}$$

qui est la contradiction voulue.

★ D'après (1.3), on a $\text{int}(\bar{C}_i(x)) = \bigcap_{j=1}^N \text{int}(H_{ij}(x))$ et donc pour obtenir $\text{int}(\bar{C}_i(x)) = C_i^o(x)$, on doit montrer que pour tout $x_j \neq x_i$

$$\text{int}(H_{ij}(x)) \subset \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| < |u - x_j| \right\}.$$

Soit $u \in \text{int}(H_{ij}(x))$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(u, \varepsilon) \subset H_{ij}(x)$. Si $u = x_i$, on a trivialement $|u - x_i| < |u - x_j|$. Sinon, on pose $t = 1 + \varepsilon/|u - x_i|$ et $w = x_i + t(u - x_i)$. Alors on a :

$$|w - u| = |(t - 1)u - (t - 1)x_i| = \varepsilon,$$

ce qui implique $w \in H_{ij}(x)$. Comme $u = \frac{1}{t}w + (1 - \frac{1}{t})x_i$ avec $1/t < 1$, on a d'après (1.4) $|u - x_i| < |u - x_j|$.

★ Soit $u \in \bar{C}_i(x)$. Alors d'après (1.3), $u \in H_{ij}(x)$ pour tout j . Considérons la suite $u_n = (1 - 1/n)u + 1/nx_i$, $n \geq 1$. D'après (1.4), on a pour tout $x_j \neq x_i$, $|u_n - x_i| < |u_n - x_j|$, i.e. $u_n \in C_i^o(x)$. Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers u , ceci prouve que $u \in \text{Adh}(C_i^o(x))$ et donc $\bar{C}_i(x) = \text{Adh}(C_i^o(x))$.

★ La dernière relation de l'assertion (a) découle de la définition de la frontière d'un ensemble A de \mathbb{R}^d : $\partial A = \text{Adh}(A) \cap (\text{int}(A))^c$ et des relations précédentes :

$$\partial C_i^o(x) = \text{Adh}(C_i^o(x)) \cap (C_i^o(x))^c = \bar{C}_i(x) \cap \text{int}(\bar{C}_i(x)) = \partial \bar{C}_i(x).$$

(c) Par définition de la frontière d'un ensemble et d'après (b), on a :

$$\begin{aligned} \partial C_i(x) &= \bar{C}_i(x) \cap (\text{int}(\bar{C}_i(x)))^c \\ &= \bar{C}_i(x) \cap (C_i^o(x))^c \\ &= \cup_{x_j \neq x_i} S_{ij}(x) \cap \bar{C}_i(x) \end{aligned}$$

Puisque $S_{ij}(x)$ est un hyperplan de \mathbb{R}^d , on a $\lambda_d(S_{ij}(x)) = 0$ et l'assertion (c) est alors une conséquence de la relation ci-dessus. \square

1.2 Quantification de Voronoi et distorsion optimale

Soit $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ de loi de probabilité \mathbb{P}_X , $x = (x_1, \dots, x_N)$ un N -uplet dans \mathbb{R}^d et $C_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, une partition de Voronoi de x . On appelle quantifieur de Voronoi de X , la variable aléatoire \hat{X}^x (notée simplement \hat{X} s'il n'y a pas d'ambiguïté) à valeurs dans la grille x , définie par :

$$\hat{X}^x = \text{Proj}_x(X) := \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{C_i(x)}(X)$$

et donc de loi de probabilité discrète $\mathbb{P}_{\hat{X}}$ caractérisée par :

$$p_i := \mathbb{P}_{\hat{X}}(x_i) = \mathbb{P}(\hat{X} = x_i) = \mathbb{P}(X \in C_i(x)) = \mathbb{P}_X(C_i(x)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Autrement dit, \hat{X}^x est la projection selon le plus proche voisin de la variable aléatoire X sur la grille x . Les p_i sont appelés aussi masses des cellules de Voronoi. L'erreur résultante au carré de quantification quadratique est appelée distorsion (quadratique) et s'écrit donc par définition d'une partition de Voronoi :

$$\begin{aligned} D_N^X(x) &:= \mathbb{E}|X - \hat{X}^x|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[|X - x_i|^2 \mathbf{1}_{C_i(x)}(X)] = \mathbb{E}\left[\min_{i=1, \dots, N} |X - x_i|^2\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d_N(x, u) \mathbb{P}_X(du) \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $d_N : (\mathbb{R}^d)^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la distorsion locale définie par :

$$d_N(x, u) = \min_{i=1, \dots, N} |u - x_i|^2 = \sum_{i=1}^N |u - x_i|^2 1_{C_i(x)}(u) \quad (1.6)$$

La distorsion ne dépend que du N -uplet x et de la loi de probabilité \mathbb{P}_X de X .

Le problème de la quantification optimale, à N fixé, consiste à minimiser sur les N -uplets x la distorsion. On dira que $\hat{X} = \hat{X}^{x^*}$ est un N -quantifieur optimal de X si :

$$\mathbb{E}|X - \hat{X}|^2 = \inf_{x \in (\mathbb{R}^d)^N} D_N^X(x) =: \underline{D}_N^X.$$

En fait, comme le prouve le résultat suivant, la N -quantification optimale fournit la meilleure approximation quadratique d'une variable aléatoire (loi de probabilité) par une variable aléatoire discrète (loi de probabilité discrète) de support à au plus N points.

Proposition 1.2.2 *Pour tout $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$, on a :*

$$D_N^X(x) = \inf \left\{ \mathbb{E}|X - Y|^2 : Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mesurable, } Y(\Omega) \subset \{x_1, \dots, x_N\} \right\} \quad (1.7)$$

et donc

$$\underline{D}_N^X = \inf \left\{ \mathbb{E}|X - Y|^2 : Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mesurable, } \#Y(\Omega) \leq N \right\}.$$

Preuve. Soit Y une variable aléatoire quelconque discrète dans \mathbb{R}^d de support $Y(\Omega) \subset \{x_1, \dots, x_N\}$. On a alors par définition de la quantification de Voronoi :

$$|X - \hat{X}^x|^2 = \min_{i=1, \dots, N} |X - x_i|^2 \leq |X - Y|^2, \quad p.s.$$

d'où $D_N^X(x) \leq \mathbb{E}|X - Y|^2$ et donc l'inégalité \leq dans (1.7).

Réciproquement, considérons $Y = \hat{X}^x$ un quantifieur de Voronoi de X qui est bien une variable aléatoire discrète de support inclus dans $\{x_1, \dots, x_N\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} D_N^X(x) &= \mathbb{E}[\min_{i=1, \dots, N} |X - x_i|^2] = \mathbb{E}|X - Y|^2 \\ &\geq \inf \left\{ \mathbb{E}|X - Y|^2 : Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mesurable, } Y(\Omega) \subset \{x_1, \dots, x_N\} \right\}. \end{aligned}$$

□

L'existence et la caractérisation d'un quantifieur optimal requiert l'étude de la distorsion D_N^X en fonction de $x \in (\mathbb{R}^d)^N$.

Proposition 1.2.3 *La fonction $x \mapsto D_N^X$ est continue sur $(\mathbb{R}^d)^N$ et atteint son minimum. De plus, si $\#\text{supp}(\mathbb{P}_X) > N$, alors ce minimum est atteint en un N -uplet (x_1^*, \dots, x_N^*) tel que $x_i^* \in \text{Conv}(\text{Supp}(\mathbb{P}_X))$ et $x_i^* \neq x_j^*$ pour $i \neq j$, et on a $\underline{D}_{k+1}^X < \underline{D}_k^X$ pour $1 \leq k \leq N$.*

Preuve. La continuité de la distorsion D_N^X est une conséquence immédiate de la continuité de $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto d_N(x, u) = \min_{i=1, \dots, N} |u - x_i|^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, et du théorème de convergence dominée.

Il est clair que si $\#\text{supp}(\mathbb{P}_X) \leq N$ avec donc $\text{supp}(\mathbb{P}_X) = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k\}$ où $k \leq N$, D_N^X atteint son minimum égal à zéro en tout N -uplet $x = (x_1, \dots, x_N)$ avec $x_i = \hat{x}_i$ pour $i \leq k$.

On suppose donc $\#\text{supp}(\mathbb{P}_X) > N$ et on montre le résultat par récurrence pour D_k^X avec $k \leq N$:

Si $k = 1$, comme la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto D_1^X(x) = \mathbb{E}|X - x|^2$ est continue et tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, elle atteint son minimum.

Soit $1 \leq k \leq N$ et supposons qu'il existe $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*) \in (\mathbb{R}^d)^k$ atteignant le minimum de D_k^X . Fixons $y \in \text{supp}(\mathbb{P}_X) \setminus \{x_1^*, \dots, x_k^*\} \neq \emptyset$ et considérons le $k + 1$ -uplet $x^{(k+1)} = (x_1^*, \dots, x_k^*, y)$. Notons alors que la $k + 1$ cellule ouverte de Voronoi de $x^{(k+1)}$ est alors de mesure non nulle pour \mathbb{P}_X , i.e. $\mathbb{P}_X(C_{k+1}^o(x^{(k+1)})) \neq 0.$, et qu'on a pour tout u dans \mathbb{R}^d , $\min_{i=1, \dots, k+1} |u - x_i^{(k+1)}| \leq \min_{i=1, \dots, k} |u - x_i^*|$ avec une inégalité stricte pour $u \in C_{k+1}^o(x^{(k+1)})$. On en déduit que

$$\begin{aligned} D_{k+1}^X(x^{(k+1)}) &= \mathbb{E} \left[\min_{i=1, \dots, k+1} |X - x_i^{(k+1)}| \right] \\ &< \mathbb{E} \left[\min_{i=1, \dots, k} |X - x_i^*| \right] = \underline{D}_k^X, \end{aligned}$$

ce qui prouve $\underline{D}_{k+1}^X < \underline{D}_k^X$. Considérons l'ensemble de $(\mathbb{R}^d)^{k+1}$: $K_{k+1} = \{D_{k+1}^X \leq D_{k+1}^X(x^{(k+1)})\}$. K_{k+1} est fermé par continuité de D_{k+1}^X . Il est aussi borné car d'après le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \liminf_{x=(x_1, \dots, x_{k+1}) \rightarrow +\infty} D_{k+1}^X(x) &\geq \mathbb{E} \left[\liminf_{x=(x_1, \dots, x_{k+1}) \rightarrow +\infty} \min_{i=1, \dots, k+1} |X - x_i|^2 \right] \\ &\geq \underline{D}_k^X > D_{k+1}^X(x^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Ainsi, K_{k+1} est un compact de $(\mathbb{R}^d)^{k+1}$ dans lequel D_{k+1}^X atteint son minimum qui est alors évidemment aussi un minimum absolu sur $(\mathbb{R}^d)^{k+1}$. De plus, comme $\underline{D}_{k+1}^X < \underline{D}_k^X$, un minimum de D_{k+1}^X a nécessairement toutes ses $k + 1$ composantes distinctes. Finalement, en notant par Π la projection sur le convexe fermé $\text{Conv}(\text{Supp}(\mathbb{P}_X))$, on a pour tout $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ et $u \in \text{Supp}(\mathbb{P}_X)$, $|\Pi(x_i) - u| = |\Pi(x_i) - \Pi(u)| \leq |x_i - u|$ car Π est 1-Lipschitzienne et donc $D_N^X((\Pi(x_i))_{1 \leq i \leq N}) \leq D_N^X(x)$. Ceci prouve qu'un minimum de D_N^X a ses composantes dans $\text{Conv}(\text{Supp}(\mathbb{P}_X))$. \square

On a le résultat suivant de différentiabilité de la fonction de distorsion.

Proposition 1.2.4 (a) *La fonction $x \mapsto D_N^X$ est différentiable en tout point $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ tel que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et $\mathbb{P}_X(\cup_{i=1}^N \partial C_i(x)) = 0$. De plus,*

son gradient est donné par :

$$\nabla D_N^X(x) = 2 \left(\int_{C_i(x)} (x_i - u) \mathbb{P}_X(du) \right)_{1 \leq i \leq N}. \quad (1.8)$$

(b) En particulier, si \mathbb{P}_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors D_N^X est différentiable en tout $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ tel que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et on a

$$\arg \min_{(\mathbb{R}^d)^N} D_N^X \subset \{ \nabla D_N^X = 0 \}.$$

Preuve. Par définition (1.6) de la distorsion locale, pour tout $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ tel que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et $u \notin \cup_{i=1}^N \partial C_i(x)$, on a :

$$\frac{\partial d_N}{\partial x}(x, u) = 2 \left((x_i - u) 1_{C_i(x)}(u) \right)_{1 \leq i \leq N},$$

et donc $\frac{\partial d_N}{\partial x}(x, u)$ existe $\mathbb{P}_X(du)$ p.s. sous la condition $\mathbb{P}_X(\cup_{i=1}^N \partial C_i(x)) = 0$. De plus, pour tout x dans un compact K de $(\mathbb{R}^d)^N$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on a $\left| \frac{\partial d_N}{\partial x}(x, u) \right| \leq 2(|u| + c_K)$ où c_K est une constante dépendant de K . La fonction $u \rightarrow 2(|u| + c_K)$ étant \mathbb{P}_X intégrable, on obtient (1.8) d'après (1.5) et le théorème de Lebesgue. Finalement, (b) découle de l'assertion (c) de la proposition 1.1.1 et de la proposition 1.2.3. \square

On dit qu'un quantifieur $\hat{X} = \hat{X}^x$ est stationnaire si le N -uplet x de points associés satisfait

$$\nabla D_N^X(x) = 0.$$

Un quantifieur optimal est donc stationnaire (la réciproque n'étant pas toujours vraie). On a la propriété utile suivante sur les quantifieurs stationnaires.

Proposition 1.2.5 *Si \hat{X} est un quantifieur stationnaire de X alors on a :*

$$\mathbb{E}[X | \hat{X}] = \hat{X}. \quad (1.9)$$

Preuve. D'après (1.8), le N -uplet $x = (x_1, \dots, x_N)$ associé à un quantifieur stationnaire $\hat{X} = \hat{X}^x$ satisfait :

$$\mathbb{E}[(X - x_i) 1_{C_i(x)}(X)] = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Pour toute fonction φ Borélienne, bornée sur \mathbb{R}^d , on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\hat{X})X] &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\varphi(x_i)X 1_{C_i(x)}(X)] \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\varphi(x_i)x_i 1_{C_i(x)}(X)] = \mathbb{E}[\varphi(\hat{X})\hat{X}], \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat voulu. \square

Exemples

1. Soit $N = 1$. Alors $D_1^X(x) = \mathbb{E}|X - x|^2$ atteint son minimum en $x^* = \mathbb{E}(X)$ et on a $\underline{D}_1^X = \text{Var}(X)$.

2. Soit $N = 2$ et X de loi de probabilité discrète $\mathbb{P}_X = \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_{\frac{1}{2}} + \delta_1)$. Pour tous $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} D_2^X(x_1, x_2) &= \frac{1}{3} \left[x_1^2 + \min_{i=1,2} \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 + (x_2 - 1)^2 \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} \left[2 \left(x_1 - \frac{1}{4} \right)^2 + (x_2 - 1)^2 + \frac{1}{8} \right] & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1 \\ \frac{1}{3} \left[x_1^2 + 2 \left(x_2 - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{8} \right] & \text{si } x_1 + x_2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} D_2^X = \{ \nabla D_2^X = 0 \} = \left\{ \left(\frac{1}{4}, 1 \right); \left(0, \frac{3}{4} \right) \right\} \quad \text{et} \quad \underline{D}_2^X = \frac{1}{24}.$$

Pour $x^{*,1} = (1/4, 1)$, on a $C_{1/4}(x^{*,1}) =] - \infty, 5/8[$ et $C_1(x^{*,1}) = [5/8, \infty[$, d'où $p_{1/4}^{*,1} = 2/3$ et $p_1^{*,1} = 1/3$. Pour $x^{*,2} = (0, 3/4)$, on a $C_0(x^{*,2}) =] - \infty, 3/8[$ et $C_{3/4}(x^{*,1}) = [3/8, \infty[$, d'où $p_0^{*,2} = 1/3$ et $p_{3/4}^{*,2} = 2/3$.

3. Soit X de loi uniforme sur $[0, 1] : U([0, 1])$. La recherche du minimum de la distorsion D_N^X peut se restreindre aux N -uplets $x = (x_1, \dots, x_N)$ avec $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq 1$.

1. Pour de tels N -uplets, les cellules (fermées) de Voronoi sont :

$$\begin{aligned} \bar{C}_1(x) &= \left] -\infty, \frac{x_1 + x_2}{2} \right], & \bar{C}_i(x) &= \left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right], \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ \bar{C}_N(x) &= \left[\frac{x_{N-1} + x_N}{2}, +\infty \right[. \end{aligned}$$

On calcule explicitement le gradient de la distorsion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_N^X}{\partial x_1}(x) &= 2 \int_{\bar{C}_1(x) \cap [0,1]} (x_1 - u) du = \frac{1}{4}(3x_1 - x_2)(x_1 + x_2), \\ \frac{\partial D_N^X}{\partial x_i}(x) &= 2 \int_{\bar{C}_i(x)} (x_i - u) du = \frac{1}{4}(2x_i - (x_{i-1} + x_{i+1}))(x_{i+1} - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ \frac{\partial D_N^X}{\partial x_N}(x) &= 2 \int_{\bar{C}_N(x) \cap [0,1]} (x_N - u) du = \frac{1}{4}(3x_N - x_{N-1} - 2)(2 - (x_{N-1} + x_N)). \end{aligned}$$

On vérifie alors aisément qu'il y a un unique $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ tel que $\nabla D_N^X(x^*) = 0$: il est donné par

$$x_i^* = \frac{2i-1}{2N}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Cet unique quantifieur stationnaire est donc aussi l'unique minimum de D_N^X . Les cellules fermées de Voronoi associées sont $\bar{C}_1(x^*) =]-\infty, 1/N]$, $\bar{C}_i(x^*) = [(i-1)/N, i/N]$, $i = 2, \dots, N-1$, et $\bar{C}_N(x^*) = [1 - 1/N, \infty[$. Par symétrie et translation, on calcule aisément la distorsion minimale :

$$\begin{aligned} \underline{D}_X^N &= D_N^X(x^*) = \sum_{i=1}^N \int_{C_i(x^*)} |x_i^* - u|^2 1_{[0,1]}(u) du \\ &= N \int_{[-1/2N, 1/2N]} |u|^2 du = \frac{1}{12} \frac{1}{N^2}, \end{aligned}$$

ainsi que les masses des cellules de Voronoi associées $p_i^* = \mathbb{P}_X[C_i(x^*)] = 1/N$, $i = 1, \dots, N$.

4. Soit X de loi uniforme sur le cube $[0, 1]^d : U([0, 1]^d)$. Considérons la mosaïque de Voronoi de $[0, 1]^d$ construite avec les $N = k^d$ translations C_1, \dots, C_N du cube $[0, 1/k]^d$. Notons x_i , $i = 1, \dots, N$, les points centraux de ces cubes, voir figure. La distorsion associée est

$$D_N^X(x) = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} |x_i - u|^2 du.$$

Par translation et hométhie des cubes C_i , on a pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\int_{C_i} |x_i - u|^2 du = \int_{[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}]^d} |u|^2 du = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d} \frac{|u|^2}{k^{2+d}} du.$$

On obtient donc

$$D_N^X(x) = \frac{1}{N^{\frac{2}{d}}} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d} |u|^2 du = \frac{1}{N^{\frac{2}{d}}} \frac{d}{12}.$$

1.3 Asymptotique de l'erreur de quantification

On s'intéresse dans ce paragraphe au comportement asymptotique de la distorsion minimale lorsque le nombre de points N tend vers l'infini.

Proposition 1.3.6

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \underline{D}_N^X = 0.$$

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dense dans \mathbb{R}^d et considérons le N -uplet $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N)$. Alors la suite de variables aléatoires positives $f_N = \min_{i=1, \dots, N} |X - x_i|^2$ est décroissante et converge p.s. vers 0. On en déduit par le théorème de convergence

monotone : $D_N^X(x^{(N)}) = \mathbb{E}[f_N] \longrightarrow 0$ quand N tend vers $+\infty$. Puisque $0 \leq \underline{D}_N^X \leq D_N^X(x^{(N)})$, on a le résultat voulu. \square

La recherche de la vitesse de convergence de la distorsion minimale est un problème beaucoup plus difficile. Elle a été résolue en plusieurs étapes par Zador [21], Buckley et Wise [4] et finalement Graf et Lushgy [10]. Le premier résultat concerne la distorsion de la loi uniforme sur $[0, 1]^d$.

Théorème 1.3.1 *Soit X de loi uniforme sur $[0, 1]^d : U([0, 1]^d)$. Alors*

$$J_d := \lim_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{2}{d}} \underline{D}_N^X \text{ existe dans }]0, +\infty[.$$

Remarque 1.3.1 D'après l'exemple 4 du paragraphe précédent, on sait que $J_d \leq d/12$. Pour $d = 1$ et 2 , on connaît $J_1 = 1/12$ et $J_2 = 5/(18\sqrt{3})$. Pour $d \geq 3$, la valeur exacte de J_d est inconnue. On a cependant un équivalent quand d tend vers l'infini : $J_d \sim d/(2\pi e)$.

Dans un deuxième temps, on étend le résultat pour des lois non uniformes. On note $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_X^a + \mathbb{P}_X^s$ la décomposition de Lebesgue de \mathbb{P}_X par rapport à λ_d , i.e. \mathbb{P}_X^a est la partie absolument continue et \mathbb{P}_X^s la partie singulière. On note $d\mathbb{P}_X^a/d\lambda_d$ la densité de Radon-Nykodim de \mathbb{P}_X^a par rapport à λ_d . Pour toute fonction borélienne mesurable de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} et $r \in]0, +\infty[$, on note

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\lambda_d \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Théorème 1.3.2 *On suppose $\mathbb{E}|X|^{2+\varepsilon} < +\infty$ où $\varepsilon > 0$. Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{2}{d}} \underline{D}_N^X = J_d \left\| \frac{d\mathbb{P}_X^a}{d\lambda_d} \right\|_{\frac{d}{d+2}}. \quad (1.11)$$

Remarque 1.3.2 Si \mathbb{P}_X est une mesure purement singulière par rapport à λ_d alors le théorème précédent montre que $\underline{D}_N^X = o(N^{-2/d})$. En fait, dans ce cas, la vitesse peut être plus rapide. Par exemple, si \mathbb{P}_X est une mesure discrète alors $\underline{D}_N^X = 0$ dès que $N \geq \#\text{supp}(\mathbb{P}_X)$. Si $\#\text{supp}(\mathbb{P}_X) = \mathbb{N}$ et la transformée de Laplace de X est finie sur tout \mathbb{R}_+ , e.g. la loi de Poisson, alors :

$$\begin{aligned} \underline{D}_N^X &\leq \mathbb{E} \left[\min_{n=0, \dots, N-1} |X - n|^2 \right] \leq \mathbb{E} [1_{X \geq N} |X - N + 1|^2] \\ &\leq \mathbb{E} [1_{X \geq N} |X|^2] \leq \mathbb{E} [|X|^2 e^{\alpha X}] e^{-\alpha N}, \quad \text{pour tout } \alpha > 0, \\ &\leq 2\mathbb{E} [e^{(\alpha+1)X}] e^{-\alpha N} = O(e^{-\alpha N}) \quad \text{pour tout } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Exemple

Soit X de loi normale $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ sur \mathbb{R}^d (Σ matrice de variance-covariance). Alors la formule (1.11) donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{2}{d}} \underline{D}_N^X = 2\pi \left(1 + \frac{2}{d}\right)^{1+\frac{d}{2}} (\det(\Sigma))^{\frac{1}{d}} J_d.$$

Projet 1 : Mémoire sur la démonstration du théorème 1.3.2. Ref : Graf et Lushgy [10].

1.4 Algorithmes de recherche d'un quantifieur optimal de Voronoi

A cette étape, le problème est d'obtenir numériquement un quantifieur N -optimal, i.e. trouver un N -uplet $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ qui minimise la distorsion D_N^X . La recherche des minima d'une fonction est un problème classique en analyse. Il est lié au problème de la recherche des points à un niveau puisque $\operatorname{argmin} D_N^X \subset \{\nabla D_N^X = 0\}$. On va donc en fait chercher les quantifieurs stationnaires i.e. solution de : $\nabla D_N^X(x^*) = 0$ qui vont nous donner au moins des minimas locaux. Nous examinons dans ce paragraphe les méthodes de point fixe et celles du gradient.

1.4.1 Méthode du point fixe de Lloyd (en dimension 1)

L'approche du point fixe de Lloyd est basée sur l'équation (1.10) de stationnarité d'un quantifieur qui peut se réécrire comme :

$$x_i = \frac{1}{\mathbb{P}_X(C_i(x))} \int_{C_i(x)} u \mathbb{P}_X(du), \quad i = 1, \dots, N.$$

L'algorithme de Lloyd consiste à définir récursivement une suite $(x^n)_{n \geq 0}$ dans $(\mathbb{R}^d)^N$ partant d'un point initial $x \in (\mathbb{R}^d)^N$:

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x_i^{n+1} &= F_i(x^n) := \frac{1}{\mathbb{P}_X(C_i(x^n))} \int_{C_i(x^n)} u \mathbb{P}_X(du), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'heuristique de la qualité d'un tel algorithme est donnée par l'argument suivant : en notant $\hat{X}^n := \hat{X}^{x^n}$, la relation (1.12) implique $\hat{X}^0 = \hat{X}^x$ et

$$\hat{X}^{n+1} = \mathbb{E}[X | \hat{X}^n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'après la définition-caractérisation de l'espérance conditionnelle par rapport à \hat{X}^n comme projection orthogonale dans L^2 sur l'espace $L^2(\sigma(\hat{X}^n))$ des variables aléatoires

$\sigma(\hat{X}^n)$ -mesurables de carré intégrable, on a :

$$\begin{aligned} \|X - \hat{X}^{n+1}\|_2 &= \|X - \mathbb{E}[X|\hat{X}^n]\|_2 = \min \left\{ \|X - Y\|_2 : Y \in L^2(\sigma(\hat{X}^n)) \right\} \\ &< \|X - \hat{X}^n\|_2 \quad \text{avec égalité si } \hat{X}^n = \mathbb{E}[X|\hat{X}^n]. \end{aligned}$$

En dimension $d = 1$, on montre (voir [11]) que lorsque \mathbb{P}_X admet une densité strictement log-concave (e.g. la distribution normale), alors l'application $x \mapsto (F_i(x))_{1 \leq i \leq N}$ est une contraction et donc admet un unique point fixe vers lequel la méthode de Lloyd converge avec une vitesse exponentielle. En dimension $d \geq 2$, les résultats de convergence de la méthode de Lloyd ne sont pas clairement établis dans la littérature.

De plus, lorsque $d \geq 2$, l'implémentation de la méthode de Lloyd n'est pas réaliste car on doit calculer numériquement des intégrales multiples sur des mosaïques de Voronoi. En fait, l'algorithme de Lloyd ne s'utilise en pratique qu'en dimension $d = 1$ où les mosaïques de Voronoi et le calcul d'intégrale simple sont explicites.

Projet 2 : Démonstration de la convergence de la méthode de Lloyd en dimension 1 et implémentation pour la loi normale.

1.4.2 Méthode du gradient déterministe (en dimension 1)

La méthode du gradient pour la recherche d'un quantifieur stationnaire x^* , i.e. $\nabla D_N^X(x^*) = 0$, est un algorithme qui corrige à chaque pas dans le bon sens, l'ampleur des corrections diminuant petit à petit. Supposons ainsi que x^* est un point attractif, i.e.

$$(x - x^* | \nabla D_N^X(x)) > 0, \quad \forall x \neq x^* \in (\mathbb{R}^d)^N. \quad (1.13)$$

On considère alors l'algorithme

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x^{n+1} &= x^n - \gamma_n \nabla D_N^X(x^n), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où la suite (γ_n) des pas est une suite positive telle que $\sum_n \gamma_n = +\infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < +\infty$.

Cet algorithme se présente de façon générale sous la forme :

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x^{n+1} &= x^n - \gamma_n h(x^n), \end{aligned} \quad (1.15)$$

où h est une fonction continue et la suite (γ_n) des pas est une suite positive telle que $\sum_n \gamma_n = +\infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < +\infty$. La convergence de cet algorithme peut être étudiée selon la technique de Robbins-Monro. C'est l'approche que nous considérons ici. Elle peut être aussi approfondie avec la technique de Kushner-Clark, appelée encore méthode de l'EDO, en étudiant l'équation différentielle ordinaire $dx/dt = -h(x)$ associée à l'algorithme.

Proposition 1.4.7 (*Robbins-Monro déterministe*)

Soit V une fonction auxiliaire (dite de Lyapounov) à valeurs positives de classe C^1 avec un gradient ∇V Lipschitzien et telle que : $|h|^2 \leq Cte(1+V)$ et $(h|\nabla V) \geq 0$. Alors la suite $(V(x^n))_n$ converge et $\sum_n \gamma_n |(h|\nabla V)(x^n)| < +\infty$.

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 (*Robbins-Siegmund déterministe*)

Soient (V_n) , (β_n) , (χ_n) et (η_n) quatre suites positives telles que :

$$V_{n+1} \leq V_n(1 + \beta_n) + \chi_n - \eta_n, \quad \sum_n \beta_n < +\infty, \quad \sum_n \chi_n < +\infty.$$

Alors (V_n) converge dans \mathbb{R}_+ et $\sum_n \eta_n < +\infty$.

Preuve. On pose $\alpha_n = 1/\prod_{k=1}^n (1 + \beta_k)$, $V'_n = \alpha_{n-1}V_n$, $\chi'_n = \alpha_n\chi_n$, $\eta'_n = \alpha_n\eta_n$ de telle sorte que :

$$V'_{n+1} \leq V'_n + \chi'_n - \eta'_n.$$

La suite $Y_n = V'_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\chi'_k - \eta'_k)$ est donc décroissante. De plus, comme $\ln \prod_{k=1}^n (1 + \beta_k) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \beta_k)$ converge quand n tend vers l'infini, alors (α_n) converge vers $\alpha > 0$. La convergence de la série $\sum_n \chi_n$ implique donc celle de $\sum_n \chi'_n$. La suite décroissante (Y_n) est donc minorée (par $-\sum_n \chi'_n$) et converge. Notons aussi que $\sum_{k=1}^{n-1} \eta'_k \leq Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \chi'_k$ et donc la série à termes positifs $\sum_n \eta'_n$ converge. Ceci implique la convergence de la suite (V'_n) et finalement celle de (V_n) et de $\sum_n \eta_n$. \square

Preuve de la proposition 1.4.7.

Par la formule de Taylor, on a

$$V(x^{n+1}) = V(x^n) + \int_0^1 (\nabla V(tx^n + (1-t)x^{n+1}) \cdot (x^{n+1} - x^n)) dt.$$

D'après (1.15) et puisque ∇V est Lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned} V(x^{n+1}) &\leq V(x^n) - \gamma_n (\nabla V(x^n) | h(x^n)) + Cte |x^{n+1} - x^n|^2 \\ &\leq V(x^n) (1 + Cte \gamma_n^2) + Cte \gamma_n^2 - \gamma_n (\nabla V | h)(x^n), \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse $|h|^2 \leq Cte(1 + V)$. On conclut avec le lemme 1.4.1. \square

Application à l'algorithme du gradient (1.14).

Il y a diverses variations autour du choix des fonctions de Lyapounov pour obtenir des versions multiples de la convergence de l'algorithme de Robbins-Monro et en particulier de l'algorithme du gradient (1.14) avec $h = \nabla D_N^X$.

★ Un premier choix est $V(x) = |x - x^*|^2$. Alors $\nabla V(x) = 2(x - x^*)$. D'après l'expression (1.8) de ∇D_N^X , on a $|\nabla D_N^X(x)|^2 \leq \text{Cte}(1 + |x|^2)$ de sorte que sous (1.13), les hypothèses de la proposition 1.4.7 sont vérifiées. On obtient alors que $|x^n - x^*|^2$ converge vers une constante $\delta \geq 0$ et la série $\sum_n \gamma_n |(\nabla D_N^X(x^n)|x^n - x^*)|$ converge. Si par l'absurde $\delta \neq 0$, alors à partir d'un certain rang n_0 , on aurait pour tout $n \geq n_0$, $0 < \delta/2 \leq |x^n - x^*|^2 \leq 2\delta$ et $|(\nabla D_N^X(x^n)|x^n - x^*)| > c$ avec $c > 0$ d'après (1.13). C'est en contradiction avec la divergence de la série $\sum_n \gamma_n$.

★ Un autre choix de fonction de Lyapounov est $V(x) = D_N^X$. Sous la condition que ∇D_N^X est Lipschitzienne et $|\nabla D_N^X|^2 \leq \text{cte}(1 + D_N^X)$, la proposition 1.4.7 implique que la suite $(D_N^X(x^n))_n$ converge vers D^* et la série $\sum_n \gamma_n |\nabla D_N^X(x^n)|^2$ converge. Si de plus $D_N^X(x)$ converge vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini, alors en utilisant la méthode dite de l'EDO (équation différentielle ordinaire), on montre (voir Lemme 3.III.8 dans [5]) que x^n converge vers une composante connexe de $\{\nabla D_N^X = 0\} \cap \{D_N^X = D^*\}$. En particulier, si $\{\nabla D_N^X = 0\} = \{x^*\}$ alors x^n converge vers x^* .

Remarque 1.4.3 Les hypothèses ci-dessus requises pour assurer la convergence de la méthode du gradient ne sont pas vérifiées par la fonction de distorsion. Cependant, il existe des résultats partiels de convergence dans le cas unidimensionnel ou lorsque le support de la loi de X est compact, cf [15]. De plus, l'implémentation pratique donne des résultats satisfaisants (ce qui est souvent le cas dans les méthodes de gradient) et on peut obtenir des estimations d'erreur de la distorsion (voir paragraphe suivant).

En pratique, la méthode du gradient déterministe est difficilement implémentable au delà de la dimension $d \geq 2$ car le calcul de ∇D_N^X fait intervenir des intégrales multiples (sur des cellules de Voronoi). En dimension 1, comme pour la méthode de Lloyd, les calculs d'intégrales et de cellules de Voronoi sont explicites, et la méthode du gradient est efficace.

Exemple pour la loi normale unidimensionnelle

Soit X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. La recherche du minimum de la distorsion D_N^X peut se restreindre aux N -uplets $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Pour de tels N -uplets, les cellules (fermées) de Voronoi sont $C_i(x) = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ où on a posé $x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$ et par convention $x_{1/2} = -\infty$ (lorsque $i = 1$) et $x_{N+1/2} = +\infty$ (lorsque $i = N$). En notant par ϕ la fonction de distribution de $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e. $\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-u^2/2} du$, on calcule explicitement le gradient de la distorsion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_N^X}{\partial x_i}(x) &= x_i [\phi(x_{i+1/2}) - \phi(x_{i-1/2})] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}x_{i+1/2}^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}x_{i-1/2}^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Projet 3 : Implémenter la méthode du gradient pour la loi normale scalaire et comparer avec la méthode de Lloyd.

1.4.3 Méthode du gradient stochastique : algorithme de Kohonen

La méthode du gradient stochastique pour la recherche d'un quantifieur stationnaire est basée sur le fait que le gradient de la distorsion admet une représentation intégrale par rapport à la loi de probabilité X simulable :

$$\nabla D_N^X(x) = \int \nabla_x d_N(x, u) \mathbb{P}_X(du) = \mathbb{E}[\nabla_x d_N(x, Z)],$$

où Z est une variable aléatoire de loi de probabilité \mathbb{P}_X et $\nabla_x d_N : (\mathbb{R}^d)^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est donné d'après (1.8) par :

$$\frac{1}{2} \nabla_x d_N(x, u) = ((x_i - u) 1_{C_i(x)})_{1 \leq i \leq N}. \quad (1.16)$$

On considère alors l'algorithme stochastique définissant de façon récursive la suite de variables aléatoires (x^n) dans $(\mathbb{R}^d)^N$ par :

$$x^{n+1} = x^n - \frac{\gamma_n}{2} \nabla_x d_N(x^n, Z_{n+1}), \quad (1.17)$$

où la suite (γ_n) des pas est une suite positive telle que $\sum_n \gamma_n = +\infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < +\infty$ et la suite (Z_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi \mathbb{P}_X simulable choisie indépendante de la variable initiale x^0 . On peut réécrire (1.17) sous la forme :

$$x^{n+1} = x^n - \frac{\gamma_n}{2} (\nabla D_N^X(x^n) + \nabla_x d_N(x^n, Z_{n+1}) - \nabla D_N^X(x^n)).$$

Les termes $\nabla_x d_N(x^n, Z_{n+1}) - \nabla D_N^X(x^n)$, $n \geq 0$, ont une espérance conditionnelle nulle par rapport à $\mathcal{F}_n^Z = \sigma(x^0, Z_1, \dots, Z_n)$ filtration propre engendrée par Z (et x^0).

Finalement, on est amené à étudier des algorithmes stochastiques généraux de la forme :

$$x^{n+1} = x^n - \gamma_n (h(x^n) + \varepsilon_{n+1}), \quad (1.18)$$

où h est une fonction continue, la suite (γ_n) des pas est une suite positive telle que $\sum_n \gamma_n = +\infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < +\infty$ et la suite de variables aléatoires (ε_n) vérifie

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.19)$$

où \mathcal{F}_n est la filtration engendrée par $x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Proposition 1.4.8 (*Robbins-Monro stochastique*)

Soit V une fonction auxiliaire (dite de Lyapounov) à valeurs positives de classe C^1 avec un gradient ∇V Lipschitzien et telle que : $|h|^2 \leq Cte(1 + V)$, $(h|\nabla V) \geq 0$ et

$$\mathbb{E}[|\varepsilon_{n+1}|^2 | \mathcal{F}_n] \leq Cte(1 + V(x^n)), \quad p.s. \quad \forall n \geq 0. \quad (1.20)$$

Alors presque sûrement, la suite $(V(x^n))_n$ converge et $\sum_n \gamma_n |(h|\nabla V)(x^n)| < +\infty$.

Comme dans le cas déterministe, la preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.4.2 (*Robbins-Siegmund stochastique*)

Soient (V_n) , (β_n) , (χ_n) et (η_n) quatre suites de variables aléatoires positives (\mathcal{F}_n) -adaptées telle que :

$$\mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq V_n(1 + \beta_n) + \chi_n - \eta_n, \quad p.s. \quad \forall n \geq 0.$$

Alors presque sûrement sur

$$\Omega_1 = \left\{ \sum_n \beta_n < +\infty \text{ et } \sum_n \chi_n < +\infty \right\},$$

(V_n) converge vers V_∞ variable aléatoire positive finie et la série $\sum_n \eta_n$ converge.

Preuve. On pose $\alpha_n = 1/\prod_{k=1}^n(1 + \beta_k)$, $V'_n = \alpha_{n-1}V_n$, $\chi'_n = \alpha_n\chi_n$, $\eta'_n = \alpha_n\eta_n$ de telle sorte que :

$$\mathbb{E}[V'_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq V'_n + \chi'_n - \eta'_n.$$

La suite $Y_n = V'_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\chi'_k - \eta'_k)$ est donc une surmartingale. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau_m = \inf\{n : \sum_{k=1}^n(\chi'_k - \eta'_k) \geq m\}$ de sorte que la surmartingale arrêtée $(Y_{n \wedge \tau_m})_n$ est minorée par $-m$ et converge p.s. vers une variable aléatoire finie d'après le théorème de Doob. Donc sur $\{\tau_m = +\infty\}$, (Y_n) converge p.s. vers une limite finie.

De plus, sur Ω_1 , $\ln \prod_{k=1}^n(1 + \beta_k) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \beta_k)$ converge quand n tend vers l'infini et donc (α_n) converge vers $\alpha > 0$. La convergence de la série $\sum_n \chi_n$ implique donc celle de $\sum_n \chi'_n$ sur Ω_1 .

Puisque $\sum_{k=1}^{n-1} \eta'_k \leq Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \chi'_k$, on en déduit que la série à termes positifs $\sum_n \eta'_n$ converge sur $\Omega_1 \cap \{\tau_m = +\infty\}$ et donc aussi (V'_n) . Ceci implique la convergence de la suite (V_n) et de la série $\sum_n \eta_n$ sur $\Omega_1 \cap \{\tau_m = +\infty\}$. Or sur Ω_1 , la série $\sum_n \chi'_n$ converge et donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{+\infty}(\chi'_k - \eta'_k) < m$, i.e. $\tau_m = +\infty$. Ainsi $\Omega_1 = \cup_{m=1}^{+\infty} \Omega_1 \cap \{\tau_m = +\infty\}$ et la proposition est démontrée. \square

Preuve de la proposition 1.4.8.

Comme dans la preuve de la proposition 1.4.7, on a par la formule de Taylor, le fait que ∇V est Lipschitzienne et l'hypothèse $|h|^2 \leq \text{Cte}(1 + V)$:

$$\begin{aligned} V(x^{n+1}) &\leq V(x^n) (1 + \text{Cte}\gamma_n^2) - \gamma_n(\nabla V|h)(x^n) \\ &\quad + \text{Cte}\gamma_n^2(1 + |\varepsilon_{n+1}|^2) - \gamma_n(\nabla V(x^n)|\varepsilon_{n+1}). \end{aligned}$$

D'après (1.19) et (1.20), on obtient alors

$$\mathbb{E}[V(x^{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq V(x^n) (1 + \text{Cte}\gamma_n^2) + \text{Cte}\gamma_n^2 - \gamma_n(\nabla V|h)(x^n).$$

On conclut avec le lemme 1.4.2. □

Application à l'algorithme du gradient (1.17).

Il y a diverses variations autour du choix des fonctions de Lyapounov pour obtenir des versions multiples de la convergence de l'algorithme du gradient (1.14) avec $h = \frac{1}{2}\nabla D_N^X$ et $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}(\nabla_x d_N(x^n, Z_{n+1}) - \nabla D_N^X(x^n))$.

★ Un premier choix est $V(x) = |x - x^*|^2$. Alors $\nabla V(x) = 2(x - x^*)$. D'après l'expression (1.8) de ∇D_N^X et (1.16) de $\nabla_x d_N(x, u)$, on a

$$|\nabla D_N^X(x)|^2 + \int |\nabla_x d_N(x, u)|^2 \mathbb{P}_X(du) \leq \text{Cte}(1 + |x|^2)$$

Si on suppose de plus (1.13), alors les hypothèses de la proposition 1.4.8 sont vérifiées. On obtient alors que $|x^n - x^*|^2$ converge p.s. vers une variable aléatoire positive δ et la série $\sum_n \gamma_n |(\nabla D_N^X(x^n)|x^n - x^*)|$ converge p.s. Soit ω un évènement tel que ces deux convergences aient lieu. Si par l'absurde $\delta(\omega) \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(\omega)$, on aurait pour tout $n \geq n_0$, $0 < \delta(\omega)/2 \leq |x^n(\omega) - x^*|^2 \leq 2\delta(\omega)$ et $|(\nabla D_N^X(x^n(\omega))|x^n(\omega) - x^*)| > c(\omega)$ avec $c(\omega) > 0$ d'après (1.13). C'est en contradiction avec la divergence de la série $\sum_n \gamma_n$.

★ Un autre choix de fonction de Lyapounov est $V(x) = D_N^X$. Sous la condition que ∇D_N^X est Lipschitzienne et

$$|\nabla D_N^X(x)|^2 + \int |\nabla_x d_N(x, u)|^2 \mathbb{P}_X(du) \leq \text{cte}(1 + D_N^X(x)),$$

les hypothèses de la proposition 1.4.8 sont vérifiées et on obtient que la suite $(D_N^X(x^n))_n$ converge p.s. vers D^* et la série $\sum_n \gamma_n |\nabla D_N^X(x^n)|^2$ converge p.s. Si de plus $D_N^X(x)$ converge vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini, alors en utilisant la méthode dite de l'EDO (équation différentielle ordinaire), on montre (voir Lemme 3.III.8 dans [5]) que x^n converge p.s. vers une composante connexe de $\{\nabla D_N^X = 0\} \cap \{D_N^X = D^*\}$. En particulier, si $\{\nabla D_N^X = 0\} = \{x^*\}$ alors x^n converge vers x^* p.s.

La méthode du gradient stochastique est efficiente en grande dimension d puisqu'elle ne requiert pas le calcul d'intégrales multiples mais seulement la connaissance de la fonction locale $\nabla_x d_N(x, u)$ et la simulation de la loi de probabilité \mathbb{P}_X :

Description explicite du gradient stochastique pour la distorsion : algorithme de Kohonen

D'après l'expression (1.16) du gradient de la distorsion locale, l'algorithme du gradient stochastique (1.17) s'exprime comme :

$$x_i^{n+1} = x_i^n - \gamma_n (x_i^n - Z^{n+1}) 1_{C_i(x^n)}(Z^{n+1}), \quad i = 1, \dots, N$$

Cette procédure se décompose encore à chaque pas n de façon explicite selon :

- PHASE DE COMPÉTITION : sélectionner l'indice $i(n+1)$ tel que

$$Z^{n+1} \in C_{i(n+1)}(x^n) \quad \text{i.e.} \quad i(n+1) \in \arg \min_{i=1, \dots, N} |x_i^n - Z^{n+1}|.$$

- PHASE D'APPRENTISSAGE :

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^n - \gamma_n(x_i^n - Z^{n+1}), & \text{si } i = i(n+1) \\ x_i^{n+1} &= x_i^n, & \text{si } i \neq i(n+1) \end{aligned}$$

Cette procédure en deux phases est connue dans la littérature comme l'algorithme de Kohonen. D'un point de vue numérique, la principale activité est la phase de compétition concernant la recherche à chaque étape du plus proche voisin de la nouvelle variable simulée Z^{n+1} . La phase d'apprentissage est simplement la mise à jour de la grille x^n en modifiant la composante sélectionnée par la phase de compétition par une homothétie avec Z^{n+1} de rapport $(1 - \gamma_n)$.

Estimation des masses des cellules de Voronoi et de la distorsion minimale

Pour déterminer un quantifieur stationnaire $\hat{X}^* = \hat{X}^{x^*}$, on doit obtenir, outre la grille $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ de son support, les masses $\mathbb{P}_X(C_i(x^*))$, $i = 1, \dots, N$, des cellules de Voronoi associées qui caractérisent sa loi de probabilité. Il est donc important dans les applications numériques d'avoir une procédure de calcul des caractéristiques $\mathbb{P}_X(C_i(x^*))$ ainsi que de la distorsion associée $D_N^X(x^*)$.

★ Une première approche simple consiste, après avoir terminé l'algorithme de Kohonen jusqu'au pas n et enregistré la grille limite $x^* = x^n$, à estimer les caractéristiques voulues par une estimation standard de Monte-Carlo :

$$p_i^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{Z_k \in C_i(x^*)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{et} \quad D^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \min_{i=1, \dots, N} |Z_k - x_i^*|^2,$$

où $(Z_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un échantillon i.i.d. de loi \mathbb{P}_X . Par la loi standard des grands nombres, on est assuré de la convergence quand n tend vers l'infini d'une telle procédure :

$$p_i^n \longrightarrow \mathbb{P}_X(C_i(x^*)) \quad p.s., \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{et} \quad D^n \longrightarrow D_N^X(x^*) \quad p.s.$$

★ Une autre approche plus pertinente et moins coûteuse permet d'obtenir une estimation des caractéristiques voulues de façon simultanée à la procédure de Kohonen :

$$\begin{aligned} p_i^n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{Z_k \in C_i(x^{k-1})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{i=i(k)}, \quad i = 1, \dots, N, \\ D^n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \min_{i=1, \dots, N} |Z_k - x_i^{k-1}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Z_k - x_{i(k)}^{k-1}|^2 \end{aligned}$$

Notons que les p_i^n et D^n s'expriment aussi de manière récursive comme :

$$p_i^{n+1} = p_i^n - \frac{1}{n+1}(p_i^n - 1_{i=i(n+1)}), \quad p_i^0 = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.21)$$

$$D^{n+1} = D^n - \frac{1}{n+1} \left(D^n - |Z_{n+1} - x_{i(n+1)}^n|^2 \right), \quad D^0 = 0. \quad (1.22)$$

Proposition 1.4.9 *On suppose \mathbb{P}_X absolument continue par rapport à λ_d et $\mathbb{E}|X|^{2+\varepsilon} < +\infty$ où $\varepsilon > 0$. Alors sur l'évènement $\{x^n \rightarrow x^*\}$, on a*

$$p_i^n \rightarrow \mathbb{P}_X(C_i(x^*)) \text{ p.s.}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{et} \quad D^n \rightarrow D_N^X(x^*) \text{ p.s.}$$

Preuve. On considère une fonction mesurable $H : (\mathbb{R}^d)^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} |H(x, u)| &\leq \text{Cte}|u|^2 \\ h(x) &:= \int H(x, u) \mathbb{P}_X(du) \quad \text{est bornée sur } (\mathbb{R}^d)^N \text{ et continue en } x^*. \end{aligned}$$

Alors les variables aléatoires $H(x^n, Z_{n+1}) - h(x^n)$, $n \geq 0$, sont centrées, non corrélées deux à deux, et bornées dans $L^{1+\varepsilon/2}$. La loi forte des grands nombres dans $L^{1+\varepsilon/2}$ implique alors que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(H(x^{k-1}, Z_k) - h(x^{k-1}) \right) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

quand n tend vers l'infini. De plus avec la continuité de h en x^* , on a par le théorème de Césaro : $1/n \sum_{k=1}^n h(x^{k-1})$ converge p.s. vers $h(x^*)$ sur $\{x^n \rightarrow x^*\}$. On en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H(x^{k-1}, Z_k) \rightarrow h(x^*) \text{ p.s. sur } \{x^n \rightarrow x^*\}.$$

On applique ce résultat respectivement aux fonctions :

$$H(x, u) = 1_{C_i(x)}(u) \text{ de fonction moyenne } h(x) = \mathbb{P}_X(C_i(x)),$$

$$H(x, u) = \rho(x) \min_{i=1, \dots, N} |x_i - u|^2 \text{ de fonction moyenne } h(x) = \rho(x) D_N^X(x) \text{ où } \rho \text{ est une fonction continue positive à support compact sur } (\mathbb{R}^d)^N \text{ et } \rho(x^*) = 1. \quad \square$$

Remarque 1.4.4 Au lieu de prendre comme pas $1/n$ dans le calcul récursif (1.21)-(1.22) des p_i^n et D_n , on peut prendre le même pas (γ_n) que pour l'algorithme de Kohonen :

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &= p_i^n - \gamma_{n+1}(p_i^n - 1_{i=i(n+1)}), \quad p_i^0 = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N \\ D^{n+1} &= D^n - \gamma_{n+1} \left(D^n - |Z_{n+1} - x_{i(n+1)}^n|^2 \right), \quad D^0 = 0. \end{aligned}$$

Projet 4 : Implémenter la quantification optimale de la loi normale sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, par l'algorithme de Kohonen.

1.5 Application à l'intégration numérique et aux options européennes

L'idée est simplement d'approximer la loi de probabilité \mathbb{P}_X de la variable aléatoire X sur \mathbb{R}^d par la loi de probabilité $\mathbb{P}_{\hat{X}} = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{x_i}$ de la variable N -quantifiée $\hat{X} = \hat{X}^x$ à support discret dans la grille $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ dans $(\mathbb{R}^d)^N$. Autrement dit, pour toute fonction f intégrable par rapport à \mathbb{P}_X , notée $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$, on approxime

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(u) \mathbb{P}_X(du) \quad \text{par} \quad \mathbb{E}[f(\hat{X})] = \int f(u) \mathbb{P}_{\hat{X}}(du) = \sum_{i=1}^N p_i f(x_i).$$

L'objectif est d'évaluer la qualité de cette approximation en fonction de la distorsion et donc d'un point de vue numérique d'avoir accès au quantifieur optimal x^* et aux masses p_i^* des cellules de Voronoi pour obtenir la meilleure approximation possible.

On a le résultat basique suivant pour les fonctions Lipschitziennes. On note pour toute fonction f Lipschitzienne sur \mathbb{R}^d :

$$[f]_{lip} = \sup_{y \neq z \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(y) - f(z)|}{|y - z|} < +\infty.$$

Proposition 1.5.10 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$ et f Lipschitzienne, on a :*

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| \leq [f]_{lip} \sqrt{D_N^X(x)}.$$

Preuve. Il suffit simplement d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| &\leq \mathbb{E}|f(X) - f(\hat{X})| \\ &\leq [f]_{lip} \mathbb{E}|X - \hat{X}| \leq [f]_{lip} \sqrt{D_N^X(x)}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Remarque 1.5.5 Cette dernière proposition montre que si x^* est un N -quantifieur optimal alors $|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X}^*)]|$ converge vers 0 quand N tend vers l'infini avec une vitesse de convergence en $1/N^{1/d}$ d'après le théorème de Zador.

Lorsque f possède un peu plus de régularité, la borne d'erreur peut être améliorée.

Proposition 1.5.11 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$ telle que f soit de class C^1 avec ∇f Lipschitzienne et pour tout quantifieur stationnaire $\hat{X}^* = \hat{X}^{x^*}$, on a :*

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X}^*)] \right| \leq [\nabla f]_{lip} D_N^X(x^*).$$

Preuve. D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\hat{X}^*) + \int_0^1 \nabla f(t\hat{X}^* + (1-t)X) \cdot (X - \hat{X}^*) dt \\ &\leq f(\hat{X}^*) + \nabla f(\hat{X}^*) \cdot (X - \hat{X}^*) + [\nabla f]_{lip} |X - \hat{X}^*|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X}^*)] - \mathbb{E}[\nabla f(\hat{X}^*) \cdot (X - \hat{X}^*)] \right| \leq [\nabla f]_{lip} \mathbb{E}|X - \hat{X}^*|^2.$$

On conclut en notant que par la propriété de stationnarité (1.9), on a

$$\mathbb{E} \left[\nabla f(\hat{X}^*) \cdot (X - \hat{X}^*) \right] = \mathbb{E} \left[\nabla f(\hat{X}^*) \cdot \left(\mathbb{E}[X - \hat{X}^* | \hat{X}^*] \right) \right] = 0.$$

□

Remarque 1.5.6 Cette dernière proposition montre que si x^* est un N -quantifieur optimal, on a doublé la vitesse de convergence par rapport au cas de la proposition 1.5.10. Ainsi, $|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X}^*)]|$ converge vers 0 quand N tend vers l'infini avec une vitesse de convergence en $1/N^{2/d}$ d'après le théorème de Zador.

Finalement, on a une propriété intéressante pour l'intégration numérique de fonctions convexes.

Proposition 1.5.12 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$ telle que f soit convexe et pour tout quantifieur stationnaire $\hat{X}^* = \hat{X}^{x^*}$, on a :*

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}^*)] \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Preuve. C'est une simple conséquence de la propriété de stationnarité (1.9) et de l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}^*)] = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}[X | \hat{X}^*])] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X) | \hat{X}^*]] = \mathbb{E}[f(X)].$$

□

Remarque 1.5.7 Ceci montre que l'intégration numérique de fonctions convexes avec un quantifieur stationnaire fournit toujours une borne inférieure à la vraie valeur. Symétriquement, on a toujours une borne supérieure avec un quantifieur stationnaire pour les fonctions concaves.

Remarque 1.5.8 La méthode de quantification peut être comparée avec la méthode de Monte-Carlo qui consiste pour approximer $\mathbb{E}[f(X)]$ à générer un N -échantillon X_1, \dots, X_N de copies i.i.d. de loi \mathbb{P}_X et à calculer

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k).$$

Il est bien connu que par la loi des grands nombres, cette quantité converge p.s. quand N tend vers l'infini vers $\mathbb{E}[f(X)]$. De plus par le théorème central limite, on a une vitesse de convergence en $1/N^{\frac{1}{2}}$ indépendante de la dimension d .

Projet 5 : Calculer dans le modèle de Black-Scholes multidimensionnel le put, le spread-put européen par la méthode de quantification et comparer les résultats avec la méthode de Monte-Carlo.

Chapitre 2

Quantification d'une chaîne de Markov et applications

Dans ce chapitre, on considère une chaîne de Markov $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d de probabilités de transition $P_k(x, dx')$ (de $k-1$ à k), $k = 1, \dots, n$, et de distribution initiale μ pour X_0 . Notons alors que la distribution jointe de (X_0, \dots, X_n) est égale à $\mu(dz_0)P_1(z_0, dz_1) \dots P_n(z_{n-1}, dz_n)$.

On s'intéresse à l'approximation par quantification de cette chaîne de Markov, i.e. à l'approximation de la distribution du processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ par la distribution d'un processus $(\hat{X}_k)_{0 \leq k \leq n}$ à valeurs dans un espace d'état fini et prenant en compte la loi de probabilité du processus. Une approche naïve consisterait en la quantification du vecteur aléatoire (X_0, \dots, X_n) dans $\mathbb{R}^{d(n+1)}$ selon la méthode décrite au chapitre précédent. Mais d'après le théorème de Zador, pour un nombre total de points N dans la grille temps-espace, on obtiendrait une erreur de quantification de l'ordre $N^{-1/nd}$: c'est bien évidemment très lent lorsque n est grand.

On propose une approche basée sur le fait qu'une chaîne de Markov est complètement caractérisée par sa distribution initiale et par ses probabilités de transition. L'idée est alors de quantifier la loi initiale de X_0 et les probabilités conditionnelles de X_k sachant X_{k-1} . On verra alors que cela conduit à une erreur d'approximation d'ordre $n^{1+1/d}/N^{1/d}$.

Dans la suite, on utilise les notations usuelles νf , Pf , νP , PQ pour ν mesure, P, Q probabilités de transition et f fonction mesurable, i.e.

$$\begin{aligned} \nu f &= \int f(x)\nu(dx), & Pf(x) &= \int f(x')P(x, dx') \\ \nu P(dx') &= \int \nu(dx)P(x, dx'), & PQ(x_0, dx_2) &= \int P(x_0, dx_1)Q(x_1, dx_2). \end{aligned}$$

Pour toute fonction borélienne f de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, \quad [f]_{lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

On définit l'ensemble

$$BL_1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } [f]_{lip} \leq 1 \right\}.$$

On dit qu'une probabilité de transition P sur \mathbb{R}^d est Lipschitzienne de rapport $[P]_{lip} < +\infty$ si pour toute fonction Lipschitzienne f de rapport $[f]_{lip} < +\infty$, on a

$$|Pf(x) - Pf(x')| \leq [P]_{lip}[f]_{lip}|x - x'|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

2.1 Quantification marginale

2.1.1 Méthode

La méthode de quantification marginale consiste dans une première étape à quantifier vectoriellement les marginales de la chaîne de Markov. Précisément, à chaque date $k = 0, \dots, n$, on se donne une grille $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^{N_k})$ de N_k points dans \mathbb{R}^d à laquelle est associée une partition de Voronoi $C_i(x_k)$, $i = 1, \dots, N_k$. On considère alors pour tout k le quantifieur de Voronoi de X_k sur la grille x_k :

$$\hat{X}_k = \text{Proj}_{x_k}(X_k) := \sum_{i=1}^{N_k} x_k^i 1_{C_i(x_k)}(X_k).$$

Notons que l'application projection n'étant pas injective, le processus (\hat{X}_k) construit ainsi ne conserve pas la propriété de Markov de (X_k) . On définit cependant des matrices de probabilité de transition $\hat{P}_k = (p_k^{ij})$, $k = 1, \dots, n$, de façon canonique à partir des \hat{X}_k par :

$$p_k^{ij} := \mathbb{P}[\hat{X}_k = x_k^j | \hat{X}_{k-1} = x_{k-1}^i] = \frac{\beta_k^{ij}}{p_{k-1}^i}, \quad i = 1, \dots, N_{k-1}, \quad j = 1, \dots, N_k,$$

où

$$\begin{aligned} \beta_k^{ij} &= \mathbb{P}[(\hat{X}_k, \hat{X}_{k-1}) = (x_k^j, x_{k-1}^i)] = \mathbb{P}[(X_k, X_{k-1}) \in C_j(x_k) \times C_i(x_{k-1})] \\ p_{k-1}^i &= \mathbb{P}[\hat{X}_{k-1} = x_{k-1}^i] = \mathbb{P}[X_{k-1} \in C_i(x_{k-1})]. \end{aligned}$$

sont les masses des cellules de Voronoi du couple (X_{k-1}, X_k) (resp. X_{k-1}). On définit aussi la loi de probabilité discrète $\hat{\mu}$ (de poids $\hat{\mu}^i$, $i = 1, \dots, N_0$) de \hat{X}_0 quantifieur de Voronoi de X_0 de loi μ :

$$\hat{\mu}^i = p_0^i = \mathbb{P}[\hat{X}_0 = x_0^i] = \mathbb{P}[X_0 \in C_i(x_0)], \quad i = 1, \dots, N_0.$$

On approxime alors la loi $\mu P_1 \dots P_n$ de (X_0, \dots, X_n) par la loi discrète $\hat{\mu} \hat{P}_1 \dots \hat{P}_n$. La qualité de cette approximation est estimée en fonction des erreurs de quantification à chaque date et mesurée comme suit : on introduit l'ensemble

$$S_{n+1}^d = \left\{ \phi : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \phi(z_0, \dots, z_n) = f_0(z_0) \dots f_n(z_n) \text{ où } f_i \in BL_1(\mathbb{R}^d) \right\}$$

et on fait l'hypothèse que les probabilités de transitions P_k de la chaîne de Markov (X_k) sont Lipchitziennes. On pose alors

$$[P]_{lip} = \max_{k=1, \dots, n} [P_k]_{lip}$$

Nous discuterons plus tard cette hypothèse (voir paragraphe 2.1.2).

Afin de mettre clairement en évidence les techniques de preuve utilisées, nous commençons par regarder l'erreur d'approximation d'une probabilité de transition P_k par \hat{P}_k à la date k .

Proposition 2.1.1 *Pour tout ϕ Lipschitzienne sur \mathbb{R}^d , on a*

$$\left\| P_{k+1} \phi(X_k) - \hat{P}_{k+1} \phi(\hat{X}_k) \right\|_2 \leq [P_{k+1}]_{Lip} [\phi]_{Lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + [\phi]_{Lip} \left\| X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \right\|_2.$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \left\| P_{k+1} \phi(X_k) - \hat{P}_{k+1} \phi(\hat{X}_k) \right\|_2 &\leq \left\| P_{k+1} \phi(X_k) - \mathbb{E} \left[P_{k+1} \phi(X_k) \mid \hat{X}_k \right] \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \mathbb{E} \left[P_{k+1} \phi(X_k) \mid \hat{X}_k \right] - \hat{P}_{k+1} \phi(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Par définition-caractérisation de l'espérance conditionnelle dans L^2 , on a

$$I_1 \leq \left\| P_{k+1} \phi(X_k) - P_{k+1} \phi(\hat{X}_k) \right\|_2 \leq [P_{k+1}]_{Lip} [\phi]_{Lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2,$$

d'après la condition de Lipschitz sur P_{k+1} . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\phi(X_{k+1}) \mid X_k] \mid \hat{X}_k \right] - \mathbb{E} \left[\phi(\hat{X}_{k+1}) \mid \hat{X}_k \right] \right\|_2 \\ &= \left\| \mathbb{E} \left[\phi(X_{k+1}) \mid \hat{X}_k \right] - \mathbb{E} \left[\phi(\hat{X}_{k+1}) \mid \hat{X}_k \right] \right\|_2 \\ &\leq \left\| \phi(X_{k+1}) - \phi(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2 \leq [\phi]_{Lip} \left\| X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \right\|_2, \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la deuxième égalité le fait que \hat{X}_k est $\sigma(X_k)$ -mesurable, et dans la première inégalité la propriété de L^2 -contraction de l'espérance conditionnelle (ici par rapport à \hat{X}_k). On obtient ainsi la relation voulue. \square

Plus généralement, on a l'erreur d'approximation suivante de $\mu P_1 \dots P_n$ par $\hat{\mu} \hat{P}_1 \dots \hat{P}_n$.

Théorème 2.1.1 *Pour tout $\phi \in S_{n+1}^d$ on a*

$$\left| \left(\mu P_1 \dots P_n - \hat{\mu} \hat{P}_1 \dots \hat{P}_n \right) \phi \right| \leq \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{[P]_{lip}^{n-k+1} - 1}{[P]_{lip} - 1} \right) \| X_k - \hat{X}_k \|_2,$$

avec la convention $(u^m - 1)/(u - 1) = m$ quand $u = 1$.

Preuve. Pour tout $\phi = f_0 \dots f_n \in S_{n+1}^d$, on introduit les fonctions mesurables pour $k = 1, \dots, n$ sur \mathbb{R}^d (resp. sur la grille x_k) par :

$$\begin{aligned} v_k(z) &= f_k(z) \int f_{k+1}(z_{k+1}) \dots f_n(z_n) P_{k+1}(z, dz_{k+1}) \dots P_n(z_{n-1}, dz_n), \\ \hat{v}_k(z) &= f_k(z) \int f_{k+1}(z_{k+1}) \dots f_n(z_n) \hat{P}_{k+1}(z, dz_{k+1}) \dots \hat{P}_n(z_{n-1}, dz_n), \end{aligned}$$

avec la convention que pour $k = n$, $v_n = \hat{v}_n = f_n$. Notons alors que ces fonctions s'écrivent sous forme récursive par :

$$v_k(z) = f_k(z) P_{k+1} v_{k+1}(z) = f_k(z) \mathbb{E}[v_{k+1}(X_{k+1}) | X_k = z] \quad (2.1)$$

$$\hat{v}_k(z) = f_k(z) \hat{P}_{k+1} \hat{v}_{k+1}(z) = f_k(z) \mathbb{E}[\hat{v}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) | \hat{X}_k = z], \quad (2.2)$$

pour $k = 1, \dots, n-1$ et que

$$\left(\mu P_1 \dots P_n - \hat{\mu} \hat{P}_1 \dots \hat{P}_n \right) \phi = \mathbb{E} \left[v_0(X_0) - \hat{v}_0(\hat{X}_0) \right].$$

On va montrer alors le résultat par induction sur $\left\| v_k(X_k) - \hat{v}_k(\hat{X}_k) \right\|_2$.

Étape 1. On a clairement $\|v_k\|_\infty \leq 1$. De plus, d'après (2.1), on a :

$$\begin{aligned} [v_k]_{lip} &\leq [f_k]_{lip} + [P_{k+1} v_{k+1}]_{lip} \\ &\leq 1 + [P]_{lip} [v_{k+1}]_{lip}. \end{aligned}$$

Puisque $[v_n]_{lip} \leq 1$, on obtient par induction :

$$[v_k]_{lip} \leq \sum_{l=k}^n [P]_{lip}^{n-l} = \frac{[P]_{lip}^{n-k+1} - 1}{[P]_{lip} - 1} \quad (2.3)$$

pour tous $k = 0, \dots, n$.

Étape 2. D'après (2.1)-(2.2), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\| v_k(X_k) - \hat{v}_k(\hat{X}_k) \right\|_2 &\leq \left\| v_k(X_k) - \mathbb{E}[v_k(X_k) | \hat{X}_k] \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \mathbb{E} \left[\left(f_k(X_k) - f_k(\hat{X}_k) \right) P_{k+1} v_{k+1}(X_k) \middle| \hat{X}_k \right] \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \mathbb{E} \left[f_k(\hat{X}_k) \left(P_{k+1} v_{k+1}(X_k) - \hat{P}_{k+1} \hat{v}_{k+1}(\hat{X}_k) \right) \middle| \hat{X}_k \right] \right\|_1 \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Par la définition même de l'espérance conditionnelle, on a :

$$I_1 \leq \left\| v_k(X_k) - v_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \leq [v_k]_{lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2.$$

Comme l'espérance conditionnelle (ici par rapport à \hat{X}_k) est une L^2 -contraction et v_{k+1} est bornée par 1, on a :

$$I_2 \leq \left\| f_k(X_k) - f_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \leq \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2.$$

Puisque \hat{X}_k est $\sigma(X_k)$ -mesurable et en rappelant que f_k est bornée par 1, on a :

$$I_3 \leq \left\| v_{k+1}(X_{k+1}) - \hat{v}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2.$$

En substituant ces estimations de I_1 , I_2 et I_3 dans (2.4), on a

$$\left\| v_k(X_k) - \hat{v}_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \leq (1 + [v_k]_{lip}) \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + \left\| v_{k+1}(X_{k+1}) - \hat{v}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2.$$

Comme $\left\| v_n(X_n) - \hat{v}_n(\hat{X}_n) \right\|_2 \leq \left\| X_n - \hat{X}_n \right\|_2$, une récurrence immédiate donne :

$$\left\| v_k(Z_k) - \hat{v}_k(\hat{Z}_k) \right\|_1 \leq \sum_{l=k}^n (1 + [v_l]_{lip}) \left\| X_l - \hat{X}_l \right\|_2.$$

On obtient le résultat voulu en prenant $k = 0$ et en substituant l'estimation (2.3). \square

2.1.2 Exemple

Un exemple courant de chaîne de Markov est donné par la dynamique :

$$X_{k+1} = F(X_k, \varepsilon_{k+1}), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

où $(\varepsilon_k)_k$ est une suite de variables i.i.d. centrée et de carré intégrable (e.g. un bruit blanc gaussien standard) indépendant de X_0 et F est une fonction mesurable correspondant au schéma d'Euler de pas $\delta = T/n$ d'une diffusion sur $[0, T]$:

$$F(x, \varepsilon) = x + b(x)\delta + \sigma(x)\sqrt{\delta}\varepsilon.$$

Notons $P = P_k$, $k = 0, \dots, n$, la probabilité de transition de cette chaîne de Markov homogène. Le résultat suivant montre la propriété de Lipschitz de P .

Proposition 2.1.2 *Supposons que les coefficients b et σ soient Lipschitziens sur \mathbb{R}^d . Alors il existe une constante notée $[F]_{lip}$ telle que*

$$[P]_{lip} \leq [F]_{lip} \leq 1 + c\delta, \quad (2.5)$$

$$\|F(x, \varepsilon_1) - F(x', \varepsilon_1)\|_2 \leq [F]_{lip}|x - x'|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d \quad (2.6)$$

où c est une constante (dépendant de T , $[b]_{lip}$, $[\sigma]_{lip}$, $\mathbb{E}|\varepsilon_1|^2$) mais indépendante de δ .

Preuve. Pour tous x, x' , on a

$$\begin{aligned} |F(x, \varepsilon_1) - F(x', \varepsilon_1)|^2 &= |x - x'|^2 + |b(x) - b(x')|^2 \delta^2 + |\sigma(x) - \sigma(x')|^2 \delta \varepsilon_1^2 \\ &\quad + (x - x') \cdot (b(x) - b(x')) \delta + (x - x') \cdot (\sigma(x) - \sigma(x')) \sqrt{\delta} \varepsilon_1 \\ &\quad + (b(x) - b(x')) \cdot (\sigma(x) - \sigma(x')) \delta^{3/2} \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Sous la condition de Lipschitz sur b, σ et puisque $\mathbb{E}[\varepsilon_1] = 0, \mathbb{E}[|\varepsilon_1|^2] < +\infty$, on en déduit que

$$\mathbb{E} |F(x, \varepsilon_1) - F(x', \varepsilon_1)|^2 \leq |x - x'|^2 (1 + c\delta)$$

d'où (2.6) avec $[F]_{lip} \leq 1 + c\delta$. Finalement, en notant que pour toute fonction mesurable f sur \mathbb{R}^d , on a $Pf(x) = \mathbb{E}[f(F(x, \varepsilon_1))]$, on en déduit $[P]_{lip} \leq [F]_{lip}$ \square

2.1.3 Quantification optimale

L'estimation d'erreur obtenue dans le théorème 2.1.1 est valable pour n'importe quelle grille x_k à chaque date k . Pour minimiser cette borne d'erreur sur l'approximation de la loi de (X_0, \dots, X_n) , on va chercher à minimiser à chaque date k l'erreur de quantification, i.e. appliquer la quantification optimale à chaque marginale X_k . Cette phase d'optimisation à chaque date k est menée selon la méthode décrite au chapitre précédent. Un cas particulièrement intéressant pour les calculs est lorsque le processus X est stationnaire et donc chaque marginale X_k est identiquement distribuée. En effet dans ce cas une seule procédure d'optimisation pour X_0 est requise. Sinon de façon générale, les phases d'optimisation (sélection + apprentissage) de l'algorithme de Kohonen à chaque date k peuvent se conduire indépendamment dès lors qu'on a simulé un échantillon de (X_0, \dots, X_n) . Les probabilités de transition p_k^{ij} sont estimées par estimation de Monte-Carlo des probabilités jointes β_k^{ij} et marginales p_{k-1}^i .

D'après le théorème de Zador, pour une quantification optimale de chaque marginale X_k , et avec un nombre total de points N à répartir entre les $n + 1$ dates $k = 0, \dots, n$, on obtient dans le cas typique de l'exemple 2.1.2 un taux de convergence de l'ordre :

$$\frac{n^{1+1/d}}{N^{1/d}}.$$

2.2 Application à l'arrêt optimal et aux options américaines

On note \mathcal{T}_n l'ensemble des temps d'arrêts par rapport à la filtration (\mathcal{F}_k) engendrée par (X_k) à valeurs dans $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$. Pour simplifier, on suppose que \mathcal{F}_0 est trivial, i.e. $X_0 = x_0$ est déterministe et donc connu à la date 0. Etant donné une fonction mesurable f sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^d$, on considère le problème d'arrêt optimal à horizon fini n :

$$U_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}[f(\tau, X_\tau)]$$

Ce problème est motivé en finance par le calcul d'options américaines (en fait ici bermudéennes car les dates d'exercice de l'option sont discrètes). Dans ce cas, (X_k) , $k = 0, \dots, n$, représente le processus de prix d'une action aux dates $t_k = k\delta$, où $\delta > 0$ est le délai entre deux dates possibles d'exercice d'une option de flux $g(X_k)$, r est le taux d'intérêt et $f(k, x) = e^{-rt_k}g(x)$. Dans le cas d'un modèle à volatilité stochastique, (X_k) peut représenter aussi le couple prix-volatilité. Par exemple, (X_k) est la discrétisation par schéma d'Euler de pas δ d'un modèle de diffusion pour le couple prix-volatilité (voir exemple 2.1.2).

On va adopter la méthode de la programmation dynamique pour calculer U_0 . On introduit l'enveloppe de Snell de $(f(k, X_k))$:

$$U_k = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{k,n}} \mathbb{E}[f(\tau, X_\tau) | \mathcal{F}_k], \quad k = 0, \dots, n,$$

où $\mathcal{T}_{k,n}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $\{k, \dots, n\}$. U_k est donc en finance le prix de l'option bermudéenne à la date k . Le principe de la programmation dynamique stipule que U_k s'exprime sous forme récursive par :

$$\begin{aligned} U_n &= f(n, X_n) \\ U_k &= \max(f(k, X_k), \mathbb{E}[U_{k+1} | \mathcal{F}_k]), \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ceci signifie qu'à chaque date k , on a le choix entre arrêter le processus et recevoir comme gain $f(k, X_k)$ ou continuer et recevoir comme gain espéré $\mathbb{E}[U_{k+1} | \mathcal{F}_k]$. De plus, par la propriété de Markov de (X_k) , pour toute date k , il existe une fonction mesurable v_k sur \mathbb{R}^d telle que

$$U_k = v_k(X_k).$$

On doit donc calculer la suite de fonctions (v_k) qui s'exprime par le principe de la programmation dynamique sous forme récursive comme :

$$\begin{aligned} v_n(x) &= f(n, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ v_k(x) &= \max(f(k, x), \mathbb{E}[v_{k+1}(X_{k+1}) | X_k = x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

On est donc ramené à un calcul successif d'espérances conditionnelles faisant intervenir les probabilités de transitions des X_k .

Nous allons approximer les U_k par une quantification marginale de (X_k) telle que décrite au paragraphe précédent. Pour chaque $k = 0, \dots, n$, on note par \hat{X}_k le quantifieur de Voronoi de X_k sur une grille $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^{N_k})$ associée à une partition de Voronoi $C_i(x_k)$, $i = 1, \dots, N_k$. Notons qu'à la date $k = 0$, puisque X_0 est supposé déterministe égal à x_0 , on choisit évidemment $N_0 = 1$ et $\hat{X}_0 = x_0$. On approxime alors

la suite de fonctions (v_k) par la suite de fonctions (\hat{v}_k) où \hat{v}_k défini sur la grille x_k se calcule explicitement de façon récursive par :

$$\begin{aligned}\hat{v}_n(x) &= f(n, x) \quad \forall x \in x_n \\ \hat{v}_k(x) &= \max \left(f(k, x), \mathbb{E}[\hat{v}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) | \hat{X}_k = x] \right), \quad \forall x \in x_k, k = 0, \dots, n-1,\end{aligned}$$

Ceci s'écrit encore algorithmiquement comme :

$$\begin{aligned}\hat{v}_n(x_n^i) &= f(n, x_n^i) \quad i = 1, \dots, N_n \\ \hat{v}_k(x_k^i) &= \max \left(f(k, x_k^i), \sum_{j=1}^{N_{k+1}} p_{k+1}^{ij} \hat{v}_{k+1}(x_{k+1}^j) \right), \quad i = 1, \dots, N_k, k = 0, \dots, n-1,\end{aligned}$$

où $\hat{P}_k = (p_k^{ij})$ est la matrice de probabilité de transition de \hat{X}_{k-1} à \hat{X}_k . Ceci conduit à une approximation des U_k par

$$\hat{U}_k = \hat{v}_k(\hat{X}_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

On obtient alors l'estimation d'erreur suivante. On fait l'hypothèse que pour tout k , les fonctions $f_k := f(k, \cdot)$ sont Lipschitziennes et on pose

$$[f]_{lip} = \max_{k=0, \dots, n} [f_k]_{lip}.$$

On suppose aussi que les probabilités de transition P_k de la chaîne de Markov sont Lipschitziennes.

Théorème 2.2.2 *Pour tout $k = 0, \dots, n$, on a*

$$\|U_k - \hat{U}_k\|_2 \leq [f]_{lip} \sum_{j=k}^n \frac{[P]_{lip}^{n-j+1} - 1}{[P]_{lip} - 1} \|X_j - \hat{X}_j\|_2$$

Preuve. Le schéma de la preuve est similaire à celui du théorème 2.1.1.

Étape 1. D'après l'expression récursive de v_k , on a :

$$\begin{aligned}[v_k]_{lip} &\leq [f_k]_{lip} + [P_{k+1}v_{k+1}]_{lip} \\ &\leq [f]_{lip} + [P]_{lip}[v_{k+1}]_{lip}.\end{aligned}$$

Puisque $[v_n]_{lip} \leq [f]_{lip}$, on obtient par induction :

$$[v_k]_{lip} \leq [f]_{lip} \sum_{l=k}^n [P]_{lip}^{n-l} = [f]_{lip} \frac{[P]_{lip}^{n-k+1} - 1}{[P]_{lip} - 1}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.7)$$

Etape 2. D'après l'expression récursive de v_k et en utilisant l'inégalité triviale $|\max(a, b) - \max(a', b')| \leq \max(|a - a'|, |b - b'|)$, on a

$$\begin{aligned}
 \left\| U_k - \hat{U}_k \right\|_2 &= \left\| v_k(X_k) - \hat{v}_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \\
 &\leq \left\| f_k(X_k) - f_k(\hat{X}_k) \right\|_2 + \left\| P_{k+1}v_{k+1}(X_k) - \hat{P}_{k+1}\hat{v}_{k+1}(\hat{X}_k) \right\|_2 \\
 &\leq [f]_{lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + \left\| P_{k+1}v_{k+1}(X_k) - \mathbb{E}[P_{k+1}v_{k+1}(X_k)|\hat{X}_k] \right\|_2 \\
 &\quad + \left\| \mathbb{E}[P_{k+1}v_{k+1}(X_k)|\hat{X}_k] - \hat{P}_{k+1}\hat{v}_{k+1}(\hat{X}_k) \right\|_2 \\
 &\leq [f]_{lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + \left\| P_{k+1}v_{k+1}(X_k) - P_{k+1}v_{k+1}(\hat{X}_k) \right\|_2 \\
 &\quad + \left\| v_{k+1}(X_{k+1}) - \hat{v}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2,
 \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière inégalité la définition même de l'espérance conditionnelle et la loi des espérances conditionnelles itérées avec le fait que \hat{X}_k est $\sigma(X_k)$ -mesurable. On obtient alors

$$\left\| U_k - \hat{U}_k \right\|_2 \leq ([f]_{lip} + [P]_{lip}[v_{k+1}]_{lip}) \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + \left\| U_{k+1} - \hat{U}_{k+1} \right\|_2$$

Puisque $\left\| U_n - \hat{U}_n \right\|_2 \leq [f]_{lip} \left\| X_n - \hat{X}_n \right\|_2$, une induction directe donne :

$$\left\| U_k - \hat{U}_k \right\|_2 \leq \sum_{j=k}^n ([f]_{lip} + [P]_{lip}[v_{j+1}]_{lip}) \left\| X_j - \hat{X}_j \right\|_2$$

avec la convention que $[v_{n+1}]_{lip} = 0$. En substituant (2.7) dans cette inégalité, on a l'estimation voulue. \square

Remarque 2.2.1 D'après le théorème de Zador, pour une quantification optimale de chaque marginale X_k , et avec un nombre total de points N à répartir entre les $n + 1$ dates $k = 0, \dots, n$, on obtient dans le cas typique de l'exemple 2.1.2 un taux de convergence de l'ordre :

$$\frac{n^{1+1/d}}{N^{1/d}}.$$

Projet 6. Calculer dans un modèle à volatilité stochastique le prix du Put américain.

Chapitre 3

Filtrage et quantification

Le filtrage consiste à estimer l'état d'un système dynamique (évoluant au cours du temps) à partir d'observations bruitées. Formellement, on a un signal (X_k) , $k \geq 0$, qui représente un système qu'on cherche à estimer ou à prédire : typiquement, X peut être l'évolution de la température, d'un véhicule (avion, sous-marin ...) ou encore en finance la volatilité d'un actif risqué, et l'aléa du signal est dû aux incertitudes du modèle. On dispose alors d'une suite d'observations (Y_k) , $k \geq 0$, obtenues à partir d'informations partielles et bruitées du signal. Ce sont typiquement les capteurs sensoriels de détection du véhicule ou encore en finance le prix de l'actif risqué. Le bruit des observations représente les incertitudes du modèle comme les erreurs d'observation. L'objectif est de calculer :

- la loi de X_n sachant Y_0, \dots, Y_n : c'est le filtrage
- la loi de X_n sachant Y_0, \dots, Y_{n-1} : c'est la prédiction.

Nous étudions d'abord le cas dit du filtre linéaire, i.e. lorsque le couple signal/observation forme un suite de variables gaussiennes, et pour lequel la résolution du filtre est explicite, et nous servira de test pour les illustrations numériques. Nous considérons ensuite le cas général, dit du filtre non linéaire qui conduit à des équations d'état en dimension infinie. On utilisera alors les méthodes de quantification pour approximer numériquement le filtre.

3.1 Filtrage linéaire

3.1.1 Rappel sur les variables gaussiennes

Les variables aléatoires gaussiennes et les systèmes linéaires gaussiens jouent un rôle important dans la modélisation et le traitement du signal. Par exemple, d'après le théorème central limite, la distribution gaussienne est universelle en ce sens que tout phénomène résultant de l'accumulation d'un grand nombre de petits aléas indépendants

suit approximativement une loi gaussienne. Ceci explique en partie que les variables aléatoires gaussiennes sont l'un des modèles stochastiques fondamentaux. Ces distributions offrent aussi l'avantage d'être caractérisées uniquement par deux paramètres : la moyenne et la matrice de covariance.

Un vecteur aléatoire $Z = (Z^1, \dots, Z^d)$ de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire des composantes du vecteur X est une variable aléatoire réelle gaussienne (normale), i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \cdot Z$ est gaussien. On note $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ où $m = \mathbb{E}(Z)$ est la moyenne de Z et Σ sa matrice (symétrique-positve) de covariance :

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{E}[(Z^i - \mathbb{E}(Z^i))(Z^j - \mathbb{E}(Z^j))].$$

Sa fonction caractéristique est

$$\Phi_Z(u) := \mathbb{E}[e^{iu \cdot Z}] = \exp\left(iu \cdot m - \frac{1}{2}u \cdot \Sigma u\right).$$

Si la matrice Σ est inversible, la loi de Z admet une densité :

$$p_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - m) \cdot \Sigma^{-1}(z - m)\right).$$

Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur gaussien de dimension $p + q$ de matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{pmatrix}, \quad (\text{avec } \Sigma_{XY} = \Sigma'_{YX}).$$

X et Y sont indépendants ssi $\Sigma_{XY} = 0$. On a aussi la propriété fondamentale qui nous servira plus tard sur la loi conditionnelle.

Proposition 3.1.1 *Si la matrice Σ_Y est inversible, alors la loi de X sachant Y est gaussienne de moyenne (linéaire en Y)*

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] + \Sigma_{XY} \Sigma_Y^{-1}(Y - \mathbb{E}[Y]),$$

et de matrice de covariance (indépendante de Y)

$$\Sigma_{X|Y} := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])(X - \mathbb{E}[X|Y])'] = \Sigma_X - \Sigma_{XY} \Sigma_Y^{-1} \Sigma_{YX}.$$

Preuve. On note $m_X = \mathbb{E}[X]$, $m_Y = \mathbb{E}[Y]$, $\hat{X}(y)$ le candidat pour $\mathbb{E}[X|Y = y]$:

$$\hat{X}(y) = m_X + \Sigma_{XY} \Sigma_Y^{-1}(y - m_Y),$$

et R celui pour $\Sigma_{X|Y}$:

$$R = \Sigma_X - \Sigma_{XY} \Sigma_Y^{-1} \Sigma_{YX}.$$

On va montrer que la fonction caractéristique $\Phi_{X|Y=y}$ de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est égale à

$$\exp\left(iu.\hat{X}(y) - \frac{1}{2}u.Ru\right),$$

i.e. c'est la loi gaussienne de moyenne $\hat{X}(y)$ et de matrice de covariance R . Pour cela, on note que $\Phi_{X|Y=y}$ est caractérisée par :

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y}(u, v) &= \mathbb{E}[e^{iu.X+iv.Y}] = \mathbb{E}[e^{iv.Y}\mathbb{E}[e^{iu.X}|Y]] \\ &= \int e^{iv.y}\Phi_{X|Y=y}(u)p_Y(y)dy.\end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie aisément en substituant les expressions de $\hat{X}(y)$ et R , et les expressions de la fonction caractéristique de Y et (X, Y) que

$$\begin{aligned}&\int e^{iv.y}\exp\left(iu.\hat{X}(y) - \frac{1}{2}u.Ru\right)p_Y(y)dy \\ &= \exp\left(iu.m_X + iv.m_Y - \frac{1}{2}u.\Sigma_X u - u.\Sigma_{XY}v - \frac{1}{2}v.\Sigma_Y v\right) \\ &= \Phi_{X,Y}(u, v).\end{aligned}$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, ceci prouve que

$$\Phi_{X|Y=y}(u) = \exp\left(iu.\hat{X}(y) - \frac{1}{2}u.Ru\right).$$

□

3.1.2 Filtre de Kalman-Bucy

Le modèle linéaire gaussien pour le couple signal-observation est défini par :

$$\begin{aligned}X_n &= AX_{n-1} + B\varepsilon_n \\ Y_n &= CX_n + \eta_n,\end{aligned}$$

où A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

On suppose que (X_0, ε, η) sont des variables indépendantes gaussiennes. Les bruits gaussiens $\varepsilon_n, \eta_n, n \geq 0$ sont centrées, et on note Σ_n^ε et Σ_n^η leurs matrices de covariance, supposées inversibles. La moyenne et la variance de la variable gaussienne X_0 est notée m_0 et Σ_0^X .

On note par Π_n la loi du filtre et Π_n^- celle de la prédiction :

$$\begin{aligned}\Pi_n(dx) &= \mathbb{P}(X_n \in dx|Y_0, \dots, Y_n) \\ \Pi_n^-(dx) &= \mathbb{P}(X_n \in dx|Y_0, \dots, Y_{n-1}).\end{aligned}$$

Notons que l'espace vectoriel engendré par $(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n)$ est égal à celui engendré par $(X_0, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \eta_0, \eta_n)$ qui est gaussien par hypothèse. On en déduit que Π_n et Π_n^- sont des lois gaussiennes :

$$\begin{aligned}\Pi_n(dx) &= \mathcal{N}(\bar{X}_n, \bar{\Sigma}_n) \\ \Pi_n^-(dx) &= \mathcal{N}(\bar{X}_n^-, \bar{\Sigma}_n^-)\end{aligned}$$

de moyennes et variances conditionnelles notées :

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &= \mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n], & \bar{\Sigma}_n &= \mathbb{E}[(X_n - \bar{X}_n)(X_n - \bar{X}_n)'] \\ \bar{X}_n^- &= \mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}], & \bar{\Sigma}_n^- &= \mathbb{E}[(X_n - \bar{X}_n^-)(X_n - \bar{X}_n^-)'].\end{aligned}$$

Nous allons montrer que le calcul de ces moyennes et variances conditionnelles peut être mené explicitement de manière inductive selon deux étapes :

- Une étape de correction/mise à jour

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_n^- \\ \bar{\Sigma}_n^- \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \bar{\Sigma}_n \end{pmatrix},$$

qui utilise la nouvelle observation Y_n de la date n ,

- Une étape de prédiction

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \bar{\Sigma}_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{X}_{n+1}^- \\ \bar{\Sigma}_{n+1}^- \end{pmatrix},$$

qui utilise la transition du signal de la date n à $n+1$.

Partant d'une condition initiale donnée par $\bar{X}_0^- = m_0$, $\bar{\Sigma}_0^- = \Sigma_0^X$, on a donc un calcul explicite du filtre (et de la prédiction), appelé filtre de Kalman-Bucy.

Etape de correction/mise à jour :

Notons que puisque les vecteurs $(X_n, Y_0, \dots, Y_{n-1})$ et (Y_0, \dots, Y_n) sont gaussiens, il en est de même de \bar{X}_n^- et de la variable

$$\bar{Y}_n^- = \mathbb{E}[Y_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}].$$

On en déduit aussi que le couple de vecteurs

$$(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) = (X_n - \bar{X}_n^-, Y_n - \bar{Y}_n^-)$$

est gaussien centré, avec une loi gaussienne conditionnelle caractérisée d'après la proposition 3.1.1 par :

$$\mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n] = \Sigma_{\tilde{X}_n \tilde{Y}_n} \Sigma_{\tilde{Y}_n}^{-1} \tilde{Y}_n \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E} \left[(\tilde{X}_n - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n])(\tilde{X}_n - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n])' \right] = \Sigma_{\tilde{X}_n} - \Sigma_{\tilde{X}_n \tilde{Y}_n} \Sigma_{\tilde{Y}_n}^{-1} \Sigma_{\tilde{Y}_n \tilde{X}_n}. \quad (3.2)$$

Par définition, on a

$$\Sigma_{\tilde{X}_n} = \bar{\Sigma}_n^- \quad (3.3)$$

De plus, notons que $\bar{Y}_n^- = \mathbb{E}(CX_n + \eta_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}) = C\bar{X}_n^-$, et $\tilde{Y}_n = C\tilde{X}_n + \eta_n$. On a donc

$$\Sigma_{\tilde{X}_n \tilde{Y}_n} = \mathbb{E}(\tilde{X}_n \tilde{Y}_n') = \bar{\Sigma}_n^- C' \quad (3.4)$$

$$\Sigma_{\tilde{Y}_n} = C\bar{\Sigma}_n^- C' + \Sigma_n^\eta \quad (3.5)$$

D'autre part, puisque pour toute fonction mesurable φ :

$$\mathbb{E} \left[\tilde{X}_n \varphi(Y_0, \dots, Y_{n-1}) \right] = \mathbb{E} \left[(X_n - \mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}]) \varphi(Y_0, \dots, Y_{n-1}) \right] = 0,$$

alors \tilde{X}_n et (Y_0, \dots, Y_{n-1}) sont des variables gaussiennes noncorrelés, et donc indépendantes. On en déduit

$$\mathbb{E} \left[\tilde{X}_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}, Y_n \right] = \mathbb{E} \left[\tilde{X}_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}, \tilde{Y}_n \right] = \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n].$$

On a alors

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \bar{X}_n^- + \mathbb{E} \left[X_n - \bar{X}_n^- | Y_0, \dots, Y_n \right] = \bar{X}_n^- + \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n] \\ &= \bar{X}_n^- + \bar{\Sigma}_n^- C' (C\bar{\Sigma}_n^- C' + \Sigma_n^\eta)^{-1} (Y_n - C\bar{X}_n^-), \end{aligned}$$

avec (3.1) et en notant que $\tilde{Y}_n = C\tilde{X}_n + \varepsilon_n = Y_n - C\bar{X}_n^-$. En écrivant

$$X_n - \bar{X}_n = X_n - \bar{X}_n^- - (\bar{X}_n - \bar{X}_n^-) = \tilde{X}_n - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \tilde{Y}_n],$$

et en utilisant (3.2)-(3.3)-(3.4)-(3.5), on obtient

$$\bar{\Sigma}_n = \bar{\Sigma}_n^- - \bar{\Sigma}_n^- C' (C\bar{\Sigma}_n^- C' + \Sigma_n^\eta)^{-1} C\bar{\Sigma}_n^-.$$

On résume les résultats ci-dessus en écrivant les relations de correction/mise à jour :

$$\bar{X}_n = \bar{X}_n^- + K_n (Y_n - C\bar{X}_n^-) \quad (3.6)$$

$$\bar{\Sigma}_n = [I - K_n C] \bar{\Sigma}_n^-, \quad (3.7)$$

où K_n est la matrice dite de gain :

$$K_n = \bar{\Sigma}_n^- C' (C\bar{\Sigma}_n^- C' + \Sigma_n^\eta)^{-1}. \quad (3.8)$$

Etape de prédiction :

Cette étape est plus simple que la précédente car elle ne dépend plus des observations. On écrit

$$\bar{X}_{n+1}^- = \mathbb{E}[X_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n] = A\mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n] = A\bar{X}_n^-.$$

On a alors aussi

$$\begin{aligned}
 \bar{\Sigma}_{n+1}^- &= \mathbb{E} [(X_{n+1} - \bar{X}_{n+1}^-)(X_{n+1} - \bar{X}_{n+1}^-)'] \\
 &= \mathbb{E} [(A(X_n - \bar{X}_n) + B\varepsilon_n)(A(X_n - \bar{X}_n) + B\varepsilon_n)'] \\
 &= A\bar{\Sigma}_n A' + B\Sigma_n^\varepsilon B'.
 \end{aligned}$$

Les relations de prédiction s'écrivent donc :

$$\bar{X}_{n+1}^- = A\bar{X}_n \quad (3.9)$$

$$\bar{\Sigma}_{n+1}^- = A\bar{\Sigma}_n A' + B\Sigma_n^\varepsilon B'. \quad (3.10)$$

Remarque 3.1.1 Les suites (Σ_n^-) et (Σ_n) ne dépendent pas des observations (Y_n) . Ils peuvent donc être pré-calculées.

Exemple

Considérons l'exemple d'un modèle unidimensionnel signal/observation :

$$\begin{aligned}
 X_n &= aX_{n-1} + \varepsilon_n \\
 Y_n &= cX_n + \eta_n,
 \end{aligned}$$

avec $X_0, \varepsilon_n, \eta_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $a, c \in \mathbb{R}$.

On a $\bar{X}_0^- = 0, \bar{\Sigma}_0^- = 1$ et donc d'après (3.6)-(3.7) et (3.8) : $K_0 = \frac{c\bar{\Sigma}_0^-}{c^2\bar{\Sigma}_0^- + 1} = \frac{c}{1+c^2}$ et

$$\bar{X}_0 = \bar{X}_0^- + K_0(Y_0 - c\bar{X}_0^-) = K_0 Y_0, \quad \bar{\Sigma}_0 = (1 - cK_0)\bar{\Sigma}_0^- = \frac{K_0}{c}.$$

A la date n , on a par définition de la matrice de gain $K_n = \frac{c\bar{\Sigma}_n^-}{c^2\bar{\Sigma}_n^- + 1}$. D'après l'étape de prédiction (3.10), on a $\Sigma_n^- = a^2\bar{\Sigma}_{n-1}^- + 1$. D'autre part, avec l'étape de correction (3.7), on a $\bar{\Sigma}_n = (1 - cK_n)\bar{\Sigma}_n^- = \left(1 - \frac{c^2\bar{\Sigma}_n^-}{c^2\bar{\Sigma}_n^- + 1}\right)\bar{\Sigma}_n^- = \frac{\bar{\Sigma}_n^-}{c^2\bar{\Sigma}_n^- + 1} = K_n/c$. On a donc $c\bar{\Sigma}_n^- = a^2K_{n-1} + c$, d'où la relation de récurrence sur la matrice de gain :

$$K_n = \frac{a^2K_{n-1} + c}{c(a^2K_{n-1} + c) + 1}, \quad K_0 = \frac{c}{1 + c^2}.$$

En combinant (3.6) et (3.9), on a finalement

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_n &= a\bar{X}_{n-1} + K_n(Y_n - ca\bar{X}_{n-1}), \quad \bar{X}_0 = K_0 Y_0, \\
 \bar{\Sigma}_n &= \frac{K_n}{c}.
 \end{aligned}$$

3.2 Filtrage non linéaire

3.2.1 Description du modèle

Dans la suite, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On se place dans le cadre où le couple signal/observation $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ défini sur l'espace mesurable produit $(E \times \mathbb{R}^q)$, avec (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, satisfait :

- $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition P_n de $n - 1$ à n , i.e. :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n \in dx' | X_0, \dots, X_{n-1}] &= \mathbb{P}[X_n \in dx' | X_{n-1}], \\ P_n(x, dx') &= \mathbb{P}[X_n \in dx' | X_{n-1} = x], \end{aligned}$$

et de loi initiale μ_0

- la suite $(Y_n)_n$ vérifie l'hypothèse de canal sans mémoire, i.e.
 - ★ conditionnellement aux états cachés X_0, \dots, X_n , les observations Y_0, \dots, Y_n sont mutuellement indépendantes
 - ★ la loi conditionnelle de Y_n sachant X_0, \dots, X_n ne dépend que de X_n , avec une probabilité d'émission à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^q) :

$$\mathbb{P}[Y_n \in dy' | X_n = x'] = g_n(x', y') dy'.$$

La fonction $x \mapsto g_n(x, Y_n)$ est appelée fonction de vraisemblance.

Posons $X_{[0,n]} = (X_0, \dots, X_n)$, $Y_{[0,n]} = (Y_0, \dots, Y_n)$. La loi jointe de $X_{[0,n]}$ est :

$$\mathbb{P}[X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}] = \mu_0(dx_0) \prod_{k=0}^n P_k(x_{k-1}, dx_k)$$

D'après la formule de Bayes et l'hypothèse de canal sans mémoire, la loi jointe du couple $(X_{[0,n]}, Y_{[0,n]})$ est

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}, Y_{[0,n]} \in dy_{[0,n]}] \\ &= \mathbb{P}[Y_{[0,n]} \in dy_{[0,n]} | X_{[0,n]} = x_{[0,n]}] P[X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}] \\ &= \mathbb{P}[X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}] \prod_{k=0}^n g_k(x_k, y_k) dy_k. \end{aligned} \tag{3.11}$$

En intégrant par rapport aux variables $x = (x_0, \dots, x_n)$, on obtient la loi jointe des observations $Y_{[0,n]}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{[0,n]} \in dy_{[0,n]}] &= \int_E \dots \int_E \mathbb{P}[X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}] \prod_{k=0}^n g_k(x_k, y_k) dy_k \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^n g_k(X_k, y_k) \right] dy_{[0,n]} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Autrement dit, (Y_0, \dots, Y_n) admet pour densité :

$$y = (y_0, \dots, y_n) \longmapsto \gamma_n(y) = \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^n g_k(X_k, y_k) \right].$$

Remarque 3.2.2 Notons que (X_n, Y_n) est une chaîne de Markov. En effet, on a par la formule de Bayes et l'hypothèse de canal sans mémoire :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [X_n \in dx_n, Y_n \in dy_n | X_{[0,n-1]} = x_{[0,n-1]}, Y_{[0,n-1]} = y_{[0,n-1]}] \\ = & \frac{\mathbb{P} [X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}, Y_{[0,n]} \in dy_{[0,n]}]}{\mathbb{P} [X_{[0,n-1]} \in dx_{[0,n-1]}, Y_{[0,n-1]} \in dy_{[0,n-1]}]} \\ = & \frac{\mathbb{P} [Y_{[0,n]} \in dy_{[0,n]} | X_{[0,n]} = x_{[0,n]}] P [X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}]}{\mathbb{P} [Y_{[0,n-1]} \in dy_{[0,n-1]} | X_{[0,n-1]} = x_{[0,n-1]}] P [X_{[0,n-1]} \in dx_{[0,n-1]}]} \\ = & \frac{\prod_{k=0}^n g_k(x_k, y_k) dy_k \mu_0(dx_0) \prod_{k=0}^n P_k(x_{k-1}, dx_k)}{\prod_{k=0}^{n-1} g_k(x_k, y_k) dy_k \mu_0(dx_0) \prod_{k=0}^{n-1} P_k(x_{k-1}, dx_k)} \\ = & g_n(x_n, y_n) dy_n P_n(x_{n-1}, dx_n). \end{aligned}$$

La probabilité de transition de la chaîne de Markov (X_n, Y_n) est donc donnée par :

$$Q_n((x, y), dx' dy') = P_n(x, dx') g_n(x', y') dy'$$

et sa loi initiale est $\nu_0(dxdy) = \mu_0(dx) g_0(x, y)$.

Exemple. Le cadre typique d'un tel schéma signal/observation est donné par le système :

$$\begin{aligned} X_n &= F_n(X_{n-1}, \varepsilon_n), \quad n \geq 1, \quad X_0 \sim \mu_0 \\ Y_n &= G_n(X_n, \eta_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

où F_n, G_n sont des fonctions mesurables, et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}, (\eta_n)_{n \geq 0}$ sont des bruits blancs, indépendants entre eux et indépendants de X_0 . Dans ce cas, $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition P_n donnée par :

$$P_n f(x) = \mathbb{E}[f(F_n(x, \varepsilon_n))], \quad \text{pour toute fonction mesurable bornée } f.$$

De plus, comme η_0, \dots, η_n sont mutuellement indépendants et indépendants de X_0, \dots, X_n , l'hypothèse de canal sans mémoire pour les observations est satisfaite. En supposant que pour tout x , la variable aléatoire $G_n(x, \eta_n)$ admet une densité, notée $g_n(x, y)$, on a

$$\mathbb{P}[Y_n \in dy | X_n = x] = \mathbb{P}[G_n(x, \eta_n) \in dy] = g_n(x, y) dy.$$

Par exemple, si G_n est de la forme :

$$G_n(x, \eta) = h_n(x) + \eta,$$

et si η_n admet une densité notée k_n , alors on a

$$g_n(x, y) = k_n(y - h_n(x)).$$

Un autre exemple est le cas en finance où (X_n) représente le rendement et/ou la volatilité non observable d'un actif risqué S observable. La dynamique du prix est donnée par :

$$S_{n+1} = S_n \exp \left[\left(b(X_n) - \frac{1}{2} \sigma^2(X_n) \right) \delta + \sigma(X_n) \sqrt{\delta} \eta_n \right],$$

obtenue par exemple par discrétisation selon un schéma d'Euler de pas δ d'un modèle à volatilité stochastique. En posant $Y_{n+1} = \ln(S_n/S_{n-1})$, on a le modèle d'observation :

$$Y_n = \hat{b}(X_n) \delta + \sigma(X_n) \sqrt{\delta} \eta_n,$$

où on a posé $\hat{b} = b - \sigma^2/2$. Si η_n est un bruit blanc gaussien centré réduit, alors la loi de Y_n sachant $X_n = x$ admet pour densité :

$$g_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x)\delta}} \exp \left(-\frac{(y - \hat{b}(x)\delta)^2}{2\sigma^2(x)\delta} \right).$$

3.2.2 Equation du filtre

Dans la suite, on fixera les observations à $(Y_0, \dots, Y_n) = (y_0, \dots, y_n)$ et pour simplifier les notations, on supprimera les indices y . On notera $\bar{g}_n(x) = g_n(x, y_n)$.

On note par Π_n la loi du filtre et Π_n^- celle de la prédiction :

$$\begin{aligned} \Pi_n(dx) &= \mathbb{P}(X_n \in dx | Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n) \\ \Pi_n^-(dx) &= \mathbb{P}(X_n \in dx | Y_0 = y_0, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}). \end{aligned}$$

D'après l'expression (3.11) de la loi jointe $(X_{[0,n]}, Y_{[0,n]})$ et celle (3.12) de la loi de $Y_{[0,n]}$, on obtient par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P} [X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]} | Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] = \frac{\prod_{k=0}^n \bar{g}_k(x_k) \mathbb{P} [X_{[0,n]} \in dx_{[0,n]}]}{\mathbb{E} [\prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k)]}.$$

Autrement dit, pour toute fonction test φ bornée mesurable sur E^n , on a :

$$\mathbb{E} [\varphi(X_0, \dots, X_n) | Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] = \frac{\mathbb{E} [\varphi(X_0, \dots, X_n) \prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k)]}{\mathbb{E} [\prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k)]}.$$

En particulier, pour une fonction test φ ne dépendant que de x_n , on a :

$$\begin{aligned}\Pi_n \varphi &= \mathbb{E}[\varphi(X_n) | Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k)]}{\mathbb{E}[\prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k)]} = \frac{\pi_n \varphi}{\pi_n \mathbf{1}},\end{aligned}$$

où π_n est la mesure positive, appelée filtre non normalisé, définie par :

$$\pi_n \varphi = \mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k) \right].$$

De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n^- \varphi &= \mathbb{E}[\varphi(X_n) | Y_0 = y_0, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k)]}{\mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k)]} = \frac{\pi_n^- \varphi}{\pi_n^- \mathbf{1}},\end{aligned}$$

où π_n^- est la mesure positive, appelée filtre prédictif non normalisé, définie par :

$$\pi_n^- \varphi = \mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right].$$

Nous allons montrer qu'on peut obtenir une équation récurrente exprimant Π_n en fonction de Π_{n-1} . Pour cela, il suffit d'une équation récurrente sur π_n en fonction de π_{n-1} , puis de normaliser. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur E et $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des mesures positives sur E .

Théorème 3.2.1 *La suite (Π_n) dans $\mathcal{P}(E)$ vérifie l'équation de récurrence en deux étapes, partant de l'initialisation $\Pi_0 = \mu_0$:*

- *Etape de prédiction :*

$$\Pi_{n-1} \longrightarrow \Pi_n^- = \Pi_{n-1} P_n,$$

où par définition $\Pi_{n-1} P_n(dx') = \int_E \Pi_{n-1}(dx) P_n(x, dx')$ est l'action du noyau de probabilité de transition P_n de X_n sur Π_{n-1} ,

- *Etape de correction/mise à jour :*

$$\Pi_n^- \longrightarrow \Pi_n = \frac{\bar{g}_n \Pi_n^-}{\int_E \bar{g}_n(x') \Pi_n^-(dx')} = \frac{\bar{g}_n \Pi_n^-}{(\bar{g}_n \Pi_n^-) \mathbf{1}},$$

qui pondère la mesure Π_n^- par la fonction de vraisemblance $\bar{g}_n : (\bar{g}_n \Pi_n^-)(dx') = \bar{g}_n(x') \Pi_n^-(dx')$.

De manière équivalente, (Π_n) est solution du système dynamique dans $\mathcal{P}(E)$:

$$\Pi_n = \frac{\Pi_{n-1} H_n}{\int_E \Pi_{n-1} H_n(dx')} = \frac{\Pi_{n-1} H_n}{(\Pi_{n-1} H_n) \mathbf{1}}$$

où H_n est le noyau de prédiction-correction :

$$H_n(x, dx') = \bar{g}_n(x')P_n(x, dx')$$

agissant sur la mesure Π_{n-1} par : $\Pi_{n-1}H_n(dx') = \int_E \Pi_{n-1}(dx)H_n(x, dx')$.

Preuve. Etape correction : Π_n en fonction de Π_n^- .

On a pour toute fonction test φ :

$$\begin{aligned} \pi_n \varphi &= \mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^n \bar{g}_k(X_k) \right] = \mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \bar{g}_n(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] \\ &= \pi_n^- \varphi \bar{g}_n = \bar{g}_n \pi_n^- \varphi, \end{aligned}$$

où la dernière égalité exprime simplement le fait que

$$\pi_n^- \varphi \bar{g}_n = \int_E (\varphi \bar{g}_n)(x') \pi_n^-(dx') = \int_E \varphi(x') (\bar{g}_n \cdot \pi_n^-)(dx') = \bar{g}_n \pi_n^- \varphi.$$

On a donc

$$\pi_n = \bar{g}_n \pi_n^-.$$

Par normalisation, on obtient

$$\Pi_n = \frac{\pi_n}{\pi_n 1} = \frac{\bar{g}_n \pi_n^-}{\pi_n^- \bar{g}_n} = \frac{\bar{g}_n \Pi_n^-}{\Pi_n^- \bar{g}_n}$$

Etape prédiction : Π_n^- en fonction de Π_{n-1} .

Par la propriété de Markov de (X_n) , on a

$$\begin{aligned} \pi_n^- \varphi &= \mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\varphi(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \middle| X_{[0, n-1]} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\varphi(X_n) | X_{[0, n-1]}] \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\varphi(X_n) | X_{n-1}] \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[P_n \varphi(X_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] = \pi_{n-1}(P_n \varphi) = (\pi_{n-1} P_n) \varphi, \end{aligned}$$

où la dernière égalité exprime simplement, comme conséquence de Fubini, le fait que :

$$\begin{aligned} \pi_{n-1}(P_n \varphi) &= \int_E (P_n \varphi)(x) \pi_{n-1}(dx) = \int_E \left(\int_E \varphi(x') P_n(x, dx') \right) \pi_{n-1}(dx) \\ &= \int_E \left(\int_E \pi_{n-1}(dx) P_n(x, dx') \right) \varphi(x') = \int_E \pi_{n-1} P_n(dx') \varphi(x') \\ &= (\pi_{n-1} P_n) \varphi. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\pi_n^- = \pi_{n-1} P_n.$$

Finalement, pour la normalisation, en remarquant que

$$\pi_n^- 1 = \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^{n-1} \bar{g}_k(X_k) \right] = \pi_{n-1} 1,$$

on a

$$\Pi_n^- = \frac{\pi_n^-}{\pi_n^- 1} = \frac{\pi_{n-1} P_n}{\pi_{n-1} 1} = \Pi_{n-1} P_n.$$

□

L'équation du filtre a été obtenue simplement par utilisation de la propriété de Markov et de la formule de Bayes. C'est une équation non linéaire (à cause de l'étape de normalisation) à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ et il est en général impossible de la résoudre explicitement, sauf dans des cas particuliers de modèles linéaires gaussiens, où elle se ramène à un système en dimension finie 2 : les équations du filtre de Kalman-Bucy. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques et on présente ci-dessous une approximation par quantification.

Exercice. Montrer que dans le cas de modèles linéaires gaussiens décrits au paragraphe 3.1.2, l'équation de prédiction/correction du théorème 3.2.1 permet de retrouver les équations explicites du filtre de Kalman-Bucy.

3.2.3 Approximation par quantification

On se place dans le cas où l'espace d'états du signal $E = \mathbb{R}^d$ est continu. L'idée basique est d'approximer l'équation d'évolution du filtre en dimension infinie dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, par une équation d'évolution en dimension finie grâce à une quantification de la chaîne de Markov du signal. On procède selon les étapes suivantes :

Étape de quantification marginale de (X_k)

C'est la méthode décrite au chapitre précédent. A chaque date $k = 0, \dots, n$, on se donne une grille $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^{N_k})$ de N_k points dans \mathbb{R}^d à laquelle est associée une partition de Voronoi $C_i(x_k)$, $i = 1, \dots, N_k$. On considère alors pour tout k le quantifieur de Voronoi de X_k sur la grille x_k :

$$\hat{X}_k = \text{Proj}_{x_k}(X_k) := \sum_{i=1}^{N_k} x_k^i 1_{C_i(x_k)}(X_k).$$

On définit la loi de probabilité discrète $\hat{\mu}_0$ (de poids $\hat{\mu}_0^i$, $i = 1, \dots, N_0$) de \hat{X}_0 :

$$\hat{\mu}_0^i = p_0^i = \mathbb{P}[\hat{X}_0 = x_0^i] = \mathbb{P}[X_0 \in C_i(x_0)], \quad i = 1, \dots, N_0.$$

et les matrices de probabilité de transition $\hat{P}_k = (p_k^{ij})$, $k = 1, \dots, n$:

$$p_k^{ij} := \mathbb{P}[\hat{X}_k = x_k^j | \hat{X}_{k-1} = x_{k-1}^i] \quad i = 1, \dots, N_{k-1}, \quad j = 1, \dots, N_k.$$

Ces poids μ_0^i , p_k^{ij} sont estimés par simulation de Monte-Carlo X_k , $k = 0, \dots, n$, ou bien simultanément dans l'algorithme de Kohonen.

Etape d'approximation du filtre

On rappelle que les observations sont fixées à $(Y_0, \dots, Y_n) = (y_0, \dots, y_n)$. Le filtre Π_k et le prédicteur Π_k^- sont approximés par les mesures de probabilité discrète $\hat{\Pi}_k$ et $\hat{\Pi}_k^-$ de support x_k , et définis par les équations d'évolution en dimension finie :

- *Initialisation*

$$\hat{\Pi}_0 = \hat{\mu}_0$$

- *Prédiction*

$$\hat{\Pi}_k^- = \hat{\Pi}_{k-1} \hat{P}_k, \quad k \geq 1,$$

- *Correction*

$$\hat{\Pi}_k = \frac{\bar{g}_k \hat{\Pi}_k^-}{(\bar{g}_k \hat{\Pi}_k^-) \mathbf{1}}, \quad k \geq 1,$$

Les étapes de prédiction-corrrection s'écrivent aussi sous forme :

$$\hat{\Pi}_k = \frac{\hat{\Pi}_{k-1} \hat{H}_k}{(\hat{\Pi}_{k-1} \hat{H}_k) \mathbf{1}}, \quad k \geq 1,$$

où $\hat{H}_k = (\hat{H}_k^{ij})$ est la matrice de transition :

$$\hat{H}_k^{ij} = \bar{g}_k(x_k^j) p_k^{ij}, \quad i = 1, \dots, N_{k-1}, \quad j = 1, \dots, N_k.$$

Autrement dit, les poids $(\hat{\Pi}_k^i)$, $i = 1, \dots, N_k$, de $\hat{\Pi}_k$ se calculent explicitement de manière inductive, pour $k = 1, \dots, n$, selon :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_0^i &= \hat{\mu}_0^i, \quad i = 1, \dots, N_0 \\ \hat{\Pi}_k^j &= \frac{\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \hat{\Pi}_{k-1}^i \hat{H}_k^{ij}}{\sum_{j=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_{k-1}} \hat{\Pi}_{k-1}^i \hat{H}_k^{ij}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_k. \end{aligned}$$

D'un point de vue pratique, la procédure d'implémentation algorithmique ci-dessus se décompose comme suit :

Phase de calculs off-line : Quantification optimale du signal. Notons que cette phase ne dépend pas des observations et requiert de :

- spécifier la taille N_k des grilles x_k pour $k = 0, \dots, n$, étant donné un nombre total de points $N = N_0 + \dots + N_n$.

- implémenter les grilles optimales (par l'algorithme de Kohonen) et les poids de transition associés (\hat{p}_k^{ij}).

Un cas spécial : signal stationnaire. Dans ce cadre usuel de modèle de filtrage où la distribution de X_k est la même à toute date k , on a seulement besoin de calculer la grille optimale $x^* = \{x^1, \dots, x^{\bar{N}}\}$ de la loi stationnaire μ_0 de X_0 , de taille $\bar{N} = N/(n+1)$. Alors, $x_k = x^*$, $k = 0, \dots, n$, sont les grilles optimales pour chaque X_k . On estime la probabilité $\hat{\mu}_0$ de $\hat{X}_0 = \text{Proj}_{x^*}(X_0)$, et on estime une seule matrice de probabilité de transition :

$$\hat{p}_k^{ij} = \hat{p}_0^{ij} = \mathbb{P}[\hat{X}_0^{(k)} = x^j | \hat{X}_0^{(k-1)} = x^i], \quad 0 \leq i, j \leq \bar{N},$$

où $\hat{X}_0^{(k)}$ suit la loi de \hat{X}_0 . D'un point de vue numérique, la taille des paramètres à stocker est divisée par un facteur n , ou de manière équivalente, la taille de la grille de quantification optimale pour X_0 peut être multipliée par n .

Phase de calculs on-line : étant donné un jeu d'observations $y = (y_0, \dots, y_n)$, on calcule les matrices quantifiées de prédiction-correction (\hat{H}_k), $k = 1, \dots, n$, puis les filtres quantifiés ($\hat{\Pi}_k$), $k = 0, \dots, n$. Pour toute fonction test φ , on calcule alors :

$$\hat{\Pi}_n \varphi = \sum_{i=1}^{N_n} \varphi(x_n^i) \hat{\Pi}_n^i.$$

Cette phase de calcul est instantanée.

Nous analysons à présent l'erreur et la convergence du filtre approximé par quantification.

Nous imposons essentiellement deux types de conditions sur le modèle de signal-observation. Nous supposons une condition de Lipschitz sur les probabilités de transition du signal :

(A1) Les probabilités de transition P_k , $k = 1, \dots, n$, sont Lipschitz de ratio $[P_k]_{Lip}$, i.e. pour toute fonction Lipschitzienne φ sur \mathbb{R}^d , de ratio $[\varphi]_{Lip}$, on a :

$$|P_k \varphi(x) - P_k \varphi(\hat{x})| \leq [P_k]_{Lip} [\varphi]_{Lip} |x - \hat{x}|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d,$$

et on pose $[P]_{Lip} := \max_{k=1, \dots, n} [P_k]_{Lip}$.

On suppose aussi une condition de Lipschitz sur les fonctions de vraisemblance :

$$(\mathbf{A2}) \left\{ \begin{array}{l}
 (i) \quad \text{Les fonctions } g_k, k = 1, \dots, n, \text{ sont bornées} \\
 \text{et on pose } \|g\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} \|g_k\|_\infty \\
 (ii) \quad \text{Il existe } [g_k]_{Lip}, k = 1, \dots, n, \text{ tels que } \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^q \\
 |g_k(x, y) - g_k(\hat{x}, y)| \leq [g_k]_{Lip} |x - \hat{x}|, \\
 \text{et on pose } [g]_{Lip} := \max_{k=1, \dots, n} [g_k]_{Lip}.
 \end{array} \right.$$

On obtient alors la borne d'erreur suivante pour l'approximation du filtre par quantification.

Théorème 3.2.2 *Sous (A1) and (A2), étant donnée une observation $(Y_0, \dots, Y_n) = (y_0, \dots, y_n)$, on a :*

$$\sup_{\phi \in BL_1(\mathbb{R}^d)} \left| \Pi_n \phi - \hat{\Pi}_n \phi \right| \leq \frac{\|g\|_\infty^n}{\gamma_n(y)} \sum_{k=0}^n A_{n,k} \|X_k - \hat{X}_k\|_2, \quad (3.13)$$

où $\gamma_n(y)$ est la densité de (Y_0, \dots, Y_n) en $y = (y_0, \dots, y_n)$:

$$\gamma_n(y) = \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^n g_k(X_k, y_k) \right]$$

et

$$A_{n,k} = 2 \left([P]_{Lip}^{n-k} + \frac{[g]_{Lip}}{\|g\|_\infty} \frac{[P]_{Lip}^{n-k+1} - 1}{[P]_{Lip} - 1} \right).$$

Preuve. *Etape 1 : représentation backward du filtre.* On considère le filtre non normalisé (π_k) dont l'équation d'évolution forward est :

$$\pi_0 = \mu_0, \quad \pi_k = \pi_{k-1} H_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

d'où

$$\Pi_n = \frac{\pi_n}{\pi_n 1} \quad \text{et} \quad \pi_n = \mu_0 H_1 \dots H_n$$

De cette expression symétrique, on introduit les noyaux de transition donnés par les équations backward :

$$R_n = Id, \quad R_k = H_{k+1} R_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

de telle sorte que

$$\pi_n = \mu_0 R_0.$$

De manière similaire, le filtre quantifié s'exprime sous forme backward par :

$$\hat{\Pi}_n = \frac{\hat{\pi}_n}{\hat{\pi}_n \mathbf{1}}, \quad \text{avec } \hat{\pi}_n = \hat{\mu}_0 \hat{R}_0$$

et

$$\hat{R}_n = Id, \quad \hat{R}_k = \hat{H}_{k+1} \hat{R}_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Etape 2 : approximation d'erreur du filtre non normalisé. On écrit pour toute fonction test $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} |\pi_n \varphi - \hat{\pi}_n \varphi| &= \left| \mu_0 R_0 \varphi - \hat{\mu}_0 \hat{R}_0 \varphi \right| = \left| \mathbb{E} [R_0 \varphi(X_0)] - \mathbb{E} [\hat{R}_0 \varphi(\hat{X}_0)] \right| \\ &\leq \left\| R_0 \varphi(X_0) - \hat{R}_0 \varphi(\hat{X}_0) \right\|_2. \end{aligned}$$

Comme pour l'analyse d'erreur des options américaines, l'idée est alors, à partir de la formule backward de R_k et \hat{R}_k , d'obtenir une estimation de $\left\| R_k \varphi(X_k) - \hat{R}_k \varphi(\hat{X}_k) \right\|_2$ en fonction des erreurs de quantification $\left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2$. Précisément, en posant $u_k = R_k \varphi$, $\hat{u}_k = \hat{R}_k \varphi$, et en notant par définition de R_k et \hat{H}_k que

$$\begin{aligned} u_k &= H_{k+1} u_{k+1} = P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1}), \\ \hat{u}_k &= \hat{H}_{k+1} \hat{u}_{k+1} = \hat{P}_{k+1}(\bar{g}_{k+1} \hat{u}_{k+1}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

on a :

$$\begin{aligned} &\left\| u_k(X_k) - \hat{u}_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ &= \left\| P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_k) - \hat{P}_{k+1}(\bar{g}_{k+1} \hat{u}_{k+1})(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ &\leq \left\| P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_k) - \mathbb{E} \left[P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_k) \mid \hat{X}_k \right] \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \mathbb{E} \left[P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_k) \mid \hat{X}_k \right] - \hat{P}_{k+1}(\bar{g}_{k+1} \hat{u}_{k+1})(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ &\leq \left\| P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_k) - P_{k+1}(\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ &\quad + \left\| (\bar{g}_{k+1} u_{k+1})(X_{k+1}) - (\bar{g}_{k+1} \hat{u}_{k+1})(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2, \\ &\leq [P]_{Lip} [\bar{g}_{k+1} u_{k+1}]_{Lip} \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + [g]_{Lip} \|u_{k+1}\|_\infty \left\| X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \right\|_2 \\ &\quad + \|g\|_\infty \left\| u_{k+1}(X_{k+1}) - \hat{u}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2. \end{aligned}$$

On a utilisé pour l'avant dernière inégalité, la définition même de l'espérance conditionnelle dans L^2 pour le premier terme, et le fait que \hat{X}_k est $\sigma(X_k)$ -mesurable, combinée

avec la loi des espérances conditionnelles itérées pour le deuxième terme. On a utilisé les conditions **(A1)** et **(A2)** pour la dernière inégalité. On a donc l'inégalité de récurrence

$$\begin{aligned} & \left\| u_k(X_k) - \hat{u}_k(\hat{X}_k) \right\|_2 \\ & \leq \alpha_k \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2 + \beta_{k+1} \left\| X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \right\|_2 \\ & \quad + \|g\|_\infty \left\| u_{k+1}(X_{k+1}) - \hat{u}_{k+1}(\hat{X}_{k+1}) \right\|_2, \end{aligned}$$

avec $\alpha_k = [P]_{Lip} [\bar{g}_{k+1} u_{k+1}]_{Lip}$, $\beta_{k+1} = [g]_{Lip} \|u_{k+1}\|_\infty$, et la relation terminale $\|u_n(X_n) - \hat{u}_n(\hat{X}_n)\|_2 \leq \|X_n - \hat{X}_n\|_2$. Par induction, on en déduit

$$|\pi_n \varphi - \hat{\pi}_n \varphi| \leq \left\| u_0(X_0) - \hat{u}_0(\hat{X}_0) \right\|_2 \leq \sum_{k=0}^n C_k(\varphi) \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2, \quad (3.15)$$

avec $C_k(\varphi) = \|g\|_\infty^{k-1} (\alpha_k \|g\|_\infty + \beta_k)$, $k = 0, \dots, n$, et la convention $\alpha_n = 1$ et $\beta_0 = 0$.

D'autre part, puisque $u_n = \varphi$, avec $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, et $\|u_k\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|u_{k+1}\|_\infty$ d'après (3.14), on en déduit

$$\|u_k\|_\infty \leq \|g\|_\infty^{n-k}.$$

De même, d'après (3.14), on a

$$\begin{aligned} [u_k]_{Lip} & \leq [P]_{Lip} [\bar{g}_{k+1} u_{k+1}]_{Lip} \leq [P]_{Lip} (\|g\|_\infty [u_{k+1}]_{Lip} + \|u_{k+1}\|_\infty [g]_{Lip}) \\ & \leq [P]_{Lip} \|g\|_\infty [u_{k+1}]_{Lip} + [P]_{Lip} [g]_{Lip} \|g\|_\infty^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Par induction, puisque $[u_n]_{Lip} \leq 1$, on en déduit :

$$[u_k]_{Lip} \leq ([P]_{Lip} \|g\|_\infty)^{n-k} + [g]_{Lip} \|g\|_\infty^{n-k-1} \sum_{l=1}^{n-k} [P]_{Lip}^l.$$

On a donc $\beta_k \leq [g]_{Lip} \|g\|_\infty^{n-k}$ et

$$\begin{aligned} \alpha_k & = [P]_{Lip} [\bar{g}_{k+1} u_{k+1}]_{Lip} \leq [P]_{Lip} (\|g\|_\infty [u_{k+1}]_{Lip} + \|u_{k+1}\|_\infty [g]_{Lip}) \\ & \leq ([P]_{Lip} \|g\|_\infty)^{n-k} + [g]_{Lip} \|g\|_\infty^{n-k-1} \sum_{l=1}^{n-k} [P]_{Lip}^l. \end{aligned}$$

En substituant α_k et β_k dans $C_k(\varphi)$, on obtient pour tout $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} C_k(\varphi) & \leq \|g\|_\infty^n [P]_{Lip}^{n-k} + [g]_{Lip} \|g\|_\infty^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k} [P]_{Lip}^l \\ & = \|g\|_\infty^n \left([P]_{Lip}^{n-k} + \frac{[g]_{Lip} [P]_{Lip}^{n-k+1} - 1}{[P]_{Lip} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Etape 3 : retour au filtre normalisé. Il suffit d'écrire que pour tout $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
 \left| \Pi_n \varphi - \hat{\Pi}_n \varphi \right| &= \left| \frac{\pi_n \varphi}{\pi_n \mathbf{1}} - \frac{\hat{\pi}_n \varphi}{\hat{\pi}_n \mathbf{1}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{|\pi_n \varphi - \hat{\pi}_n \varphi|}{\pi_n \mathbf{1}} \right| + \hat{\pi}_n |\varphi| \left| \frac{1}{\pi_n \mathbf{1}} - \frac{1}{\hat{\pi}_n \mathbf{1}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{|\pi_n \varphi - \hat{\pi}_n \varphi|}{\pi_n \mathbf{1}} \right| + \left| \frac{|\pi_n \mathbf{1} - \hat{\pi}_n \mathbf{1}|}{\pi_n \mathbf{1}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi_n \mathbf{1}} \sum_{k=0}^n (C_k(\varphi) + C_k(1)) \left\| X_k - \hat{X}_k \right\|_2,
 \end{aligned}$$

d'après (3.15). On conclut en se rappelant que $\pi_n \mathbf{1} = \gamma_n(y)$ est la densité de (Y_0, \dots, Y_n) et en utilisant la majoration (3.16) de $C_k(\varphi)$. \square

Remarque 3.2.3 *Convergence du filtre quantifié.* Si les grilles sont choisies optimalement à chaque date $k = 0, \dots, n$, alors d'après le théorème de Zador, on a le taux de convergence pour le filtre quantifié :

$$\sup_{\phi \in BL_1(\mathbb{R}^d)} \left| \Pi_n \varphi - \hat{\Pi}_n \varphi \right| \leq \frac{\|g\|_\infty^n}{\gamma_n(y)} \sum_{k=0}^n A_{n,k} C(\mathbb{P}_{X_k}, d) \frac{1}{N_k^{\frac{1}{d}}}. \quad (3.17)$$

En conséquence :

- Etant donné un nombre total de points N , on peut répartir optimalement le nombre de points N_k pour chaque date k , i.e. déterminer (N_0, \dots, N_k) vérifiant $N_0 + \dots + N_n = N$ et minimisant le terme de droite de (3.17).

- Pour un horizon fixé n , on a la convergence du filtre quantifié, i.e. $\hat{\Pi}_n$ converge vers Π_n lorsque $\min_{0 \leq k \leq n} N_k$ tend vers l'infini.

- Lorsque n tend vers l'infini, la convergence du filtre quantifié est aussi satisfaite typiquement dans le cas d'un schéma d'Euler issue d'une diffusion discrétisée sur $[0, T]$ de pas T/n :

$$X_{k+1} = X_k + b(X_k) \frac{T}{n} + \sigma(X_k) \sqrt{\frac{T}{n}} \varepsilon_{k+1}.$$

En effet, sous des conditions de Lipschitz sur les coefficients b et σ , on a vu que :

$$[P]_{Lip} \leq 1 + \frac{c}{n}$$

pour une constante c indépendante de n . Dans ce cas, en répartissant simplement $N_k = \bar{N} = N/(n+1)$ points sur chaque grille de temps, la relation (3.17) donne une vitesse de convergence de l'ordre :

$$\frac{\|g\|_\infty^n}{\gamma_n(y)} \frac{n+1}{\bar{N}^{1/d}}.$$

3.3 Applications et exemples

3.3.1 Application : Valorisation d'options européennes en information partielle

Soit (X_k) , $k = 0, \dots, n$, le processus de rendement et/ou de volatilité d'un actif risqué. (Y_k) , $k = 0, \dots, n$, est le (Logarithme) du processus de prix. On note $\mathcal{F}_k = \sigma(X_j, Y_j, 0 \leq j \leq k)$, $k = 0, \dots, n$, la filtration d'information totale et $\mathcal{F}_k^Y = \sigma(Y_j, 0 \leq j \leq k)$, $k = 0, \dots, n$ la filtration d'information partielle, i.e. lorsqu'on n'observe pas le rendement et/ou volatilité mais seulement le prix des actions. Dans ce modèle, on se donne une option européenne de payoff $h(Y_n)$ et plus généralement $h(X_n, Y_n)$. Son prix en information totale est donné à la date k par :

$$U_k = \mathbb{E}[h(X_n, Y_n) | \mathcal{F}_k] = v_k(X_k, Y_k),$$

pour une fonction Borélienne v_k , d'après la propriété de Markov du couple (X, Y) . (Nous avons supposé ici que \mathbb{P} est déjà une probabilité risque-neutre). La fonction v_k peut être aisément calculée par diverses méthodes : quantification ou Monte-Carlo. D'autre part, le prix de l'option européenne en information partielle est :

$$U_k^Y = \mathbb{E}[h(X_n, Y_n) | \mathcal{F}_k^Y].$$

D'après la loi des espérances conditionnelles itérées, on a :

$$\begin{aligned} U_k^Y &= \mathbb{E}[h(X_n, Y_n) | \mathcal{F}_k^Y] = \mathbb{E}[v_k(X_k, Y_k) | \mathcal{F}_k^Y] \\ &= \int v_k(x, Y_k) \Pi_k(dx) =: \Pi_k v_k(\cdot, Y_k) \end{aligned}$$

Ainsi, étant donnée une observation $(Y_0, \dots, Y_k) = (y_0, \dots, y_k)$, son prix est approximé par la formule explicite :

$$\hat{\Pi}_k v_k(\cdot, y_k) := \sum_{i=1}^{N_k} v_k(x_k^i, y_k) \hat{\Pi}_k^i,$$

où $\hat{\Pi}_k$ est le filtre quantifié.

3.3.2 Exemples

Modèle linéaire gaussien. C'est le modèle étudié au paragraphe 3.1.2 :

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} + B\varepsilon_n, & X_0 &\sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0^X), \\ Y_n &= CX_n + \eta_n, \end{aligned}$$

pour lequel le filtre Π_n est explicite : $\Pi_n \sim \mathcal{N}(\bar{X}_n, \bar{\Sigma}_n)$ avec \bar{X}_n et $\bar{\Sigma}_n$ se calculant explicitement de manière inductive.

Projet 7. Choisir les paramètres du modèle en dimension 1 pour que le signal X_k soit stationnaire, $X_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_0^X)$ pour tout k , et implémenter le filtre quantifié. Comparer avec le filtre théorique explicite.

Modèle à volatilité stochastique. On considère le modèle ARCH :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \rho X_k + \varepsilon_k, & X_0 &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_0) \\ Y_k &= \sigma(X_k) \eta_k, \end{aligned}$$

où (ε_k) et (η_k) sont deux bruits blancs indépendants gaussiens. Ce modèle est populaire en finance où X est le facteur de la volatilité de l'actif risqué de prix logarithmique $Y = \ln S$.

Projet 8. Choisir les paramètres du modèle en dimension 1 pour que le signal X_k soit stationnaire, $X_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_0^X)$ pour tout k , et implémenter le filtre quantifié. Calculer le prix d'un put européen en information totale et partielle.

Bibliographie

- [1] Bally V., Pagès G. (2003) : A quantization algorithm for solving discrete time multi-dimensional optimal stopping problems, *Bernoulli*, **9**, 1003-1049.
- [2] Bally V., Pagès G., Printems J. (2001) : A stochastic quantization method for nonlinear problems, *Monte Carlo Methods and Applications*, **7**, n^o1-2, pp.21-34.
- [3] Bartoli N. et P. Del Moral (2005) : *Simulation et algorithmes stochastiques*, Cépadués-Éditions.
- [4] Bucklew J., Wise G. (1982) : Multidimensional Asymptotic Quantization Theory with r^{th} Power distortion Measures, *IEEE Transactions on Information Theory, Special issue on Quantization*, **28**, n^o 2, pp. 239-247.
- [5] Duflo, M. (1996) : *Algorithmes stochastiques*, Mathématiques et Applications, **23**, Springer-Verlag.
- [6] Duflo, M. (1997) : *Random Iterative Models*, Coll. Applications of Mathematics, **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 385p.
- [7] Elliott R., Aggoun L. and J. Moore (1995) : *Hidden Markov Models, Estimation and Control*, Springer Verlag, 361 pp.
- [8] Fort J.C., Pagès G. (2002) : Asymptotics of optimal quantizers for some scalar distributions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **146**, pp.253-275.
- [9] Gersho A., Gray R. (eds.) (1982) : *IEEE Transactions on Information Theory, Special issue on Quantization*, **28**.
- [10] Graf S., Luschgy H. (2000) : *Foundations of Quantization for Probability Distributions*, Lecture Notes in Mathematics n^o1730, Springer, Berlin, 230 pp.
- [11] Kieffer J. (1982) : Exponential rate of convergence for the Lloyd's method I, *IEEE Transactions on Information Theory, Special issue on Quantization*, **28**, 205-210.
- [12] Kohonen T. (1982) : Analysis of simple self-organizing process, *Biological Cybernetics*, **44**, pp. 135-140.
- [13] Kushner H.J., Yin G.G. (1997) : *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*, Springer, New York.

- [14] Le Gland F. (2004) : *Introduction au filtrage en temps discret*, Polycopié de cours, Master STI, Université de Rennes 1.
- [15] Pagès G. (1997) : A space vector quantization method for numerical integration, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **89**, pp.1-38.
- [16] Pagès G., H. Pham and J. Printems, “An optimal markovian quantization algorithm for multidimensional stochastic control problems”, 2004, *Stochastics and Dynamics*, 4, 501-545.
- [17] Pagès G., H. Pham et J. Printems, “Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance”, 2004, *Handbook of Numerical and Computational Methods in Finance*, ed. Z. Rachev, Birkhauser.
- [18] Pagès G., Pham H. (2005) : Optimal quantization methods for nonlinear filtering with discrete-time observations, *Bernoulli*, **11**, 5, 893-932.
- [19] Pagès G., Printems J. (2003) : Optimal quadratic quantization for numerics : the Gaussian case, *Monte Carlo Methods and Applications*, 9, 135-165.
- [20] Sellami A. (2005) : Méthodes de quantification optimale en filtrage et applications en finance, Thèse Université Paris Dauphine.
- [21] Zador P. (1982) : Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension, *IEEE Transactions on Information Theory, Special issue on Quantization*, **28**, n^o 2, pp. 139-148. .