

**Examen du 28 mars 2006 : durée 3 heures**  
**(Notes de cours autorisées)**

**Exercice 1 : choix de portefeuille/consommation**

On considère un agent qui peut investir dans un actif risqué de prix  $S_t$  et consommer à partir de son compte d'épargne de taux d'intérêt  $r$ . Le prix de l'actif risqué est gouverné par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où  $\mu$  et  $\sigma > 0$  sont des constantes réelles et  $W$  est un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni d'une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

La stratégie de contrôle de l'agent qui a un horizon d'investissement  $T$  est un couple de processus  $(\alpha, c)$  où  $\alpha = (\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et représentant le montant investi dans  $S$ , et  $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , et représentant le taux de consommation par unité de temps. La richesse contrôlée de l'agent évolue donc selon :

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - \alpha_t) r dt - c_t dt \\ &= [rX_t + \alpha_t(\mu - r) - c_t] dt + \alpha_t \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (1)$$

Etant donné  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ , et un contrôle  $(\alpha, c)$ , on note  $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$  la solution de (1) partant de  $x$  en  $s = t$ . On dira que le contrôle  $(\alpha, c)$  est admissible, noté  $(\alpha, c) \in \mathcal{A}(t, x)$  si la richesse associée est positive :  $X_s^{t,x} \geq 0$ , pour  $t \leq s \leq T$ .

On cherche à résoudre le problème de l'agent :

$$v(t, x) = \sup_{(\alpha, c) \in \mathcal{A}(t, x)} E \left[ \int_t^T \frac{c_s^\gamma}{\gamma} + K \frac{X_T^\gamma}{\gamma} \right], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

où  $0 < \gamma < 1$  et  $K \geq 0$ .

1) a) Ecrire le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}^{a,c}$  de la diffusion (1) associée au contrôle constant  $(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

b) Ecrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associée au problème de contrôle stochastique (2), et sa condition terminale.

c) En calculant formellement le supremum en  $(a, c)$  dans (HJB), vérifier que cette équation s'écrit encore sous la forme :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - rx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} = 0. \quad (3)$$

2) On cherche une solution de (3) sous la forme  $w(t, x) = \varphi(t) \frac{x^\gamma}{\gamma}$  avec  $\varphi$  fonction de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

a) Que doit valoir  $\varphi(T)$ ?

b) Quelle est l'équation différentielle ordinaire (EDO) devant être satisfaite par  $\varphi$ ?

On ne cherchera pas à résoudre cette EDO et on admettra l'existence et l'unicité d'une solution strictement positive à cette EDO étant donnée la condition terminale de la question 2) a). On note encore  $\varphi$  cette solution et  $w(t, x) = \varphi(t) \frac{x^\gamma}{\gamma}$ .

3) a) En appliquant la formule d'Itô à  $w(s, X_s^{t,x})$  entre  $s = t$  et  $s = T$ , pour tout  $(\alpha, c) \in \mathcal{A}(t, x)$ , montrer que  $w(t, x) \geq v(t, x)$ . (Vous pourrez admettre que l'intégrale stochastique qui apparaît s'annule en espérance quitte à localiser).

b) Vérifier que le couple de fonctions  $(\hat{a}(t, x), \hat{c}(t, x))$  atteignant l'argument maximum dans l'équation (HJB) satisfaite par  $w$  est de la forme :  $\hat{a}(t, x) = \pi_1 x$  et  $\hat{c}(t, x) = \psi(t)x$  où  $\pi_1$  est une constante à expliciter et  $\psi$  est une fonction qu'on explicitera en fonction de  $\varphi$ .

c) On note par  $X_s^*$  la solution de (1) partant de  $x$  en  $s = t$  et associée au contrôle markovien  $\alpha_s^* = \hat{a}(s, X_s^*)$ ,  $c_s^* = \hat{c}(s, X_s^*)$ ,  $t \leq s \leq T$ . Expliciter  $X_s^*$  et en déduire que  $(\alpha^*, c^*) \in \mathcal{A}(t, x)$ .

d) En appliquant la formule d'Itô à  $w(s, X_s^*)$  entre  $s = t$  et  $s = T$ , montrer que  $w(t, x) = v(t, x)$  et que  $(\alpha^*, c^*)$  est un contrôle optimal. (Vous pourrez admettre que l'intégrale stochastique qui apparaît s'annule en espérance quitte à localiser).

## Exercice 2 : couverture d'une option dans le modèle de Black-Scholes avec interdiction de vente à découvert

Soit un actif risqué de processus de prix d'évolution :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où  $\mu$  et  $\sigma > 0$  sont des constantes réelles et  $W$  est un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni d'une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On suppose que l'actif sans risque a un prix constant égal à 1. Une stratégie de portefeuille est un processus réel  $\theta = (\theta_t)_t$   $\mathbb{F}$ -adapté :  $\theta_t$  représente le nombre de parts investi dans l'actif risqué à la date  $t$ . La richesse  $V_t^{\vartheta, \theta}$  d'un investisseur de capital initial  $\vartheta \geq 0$  et de stratégie de portefeuille  $\theta$  est donnée par :

$$V_t^{\vartheta, \theta} = \vartheta + \int_0^t \theta_s dS_s, \quad t \geq 0.$$

L'investisseur n'a pas le droit d'investir à découvert, c'est à dire que sa stratégie de portefeuille  $\theta$  doit satisfaire :  $\theta_t \geq 0$ ,  $t \geq 0$ , p.s. On note  $\Theta_+$  l'ensemble de ces stratégies de portefeuilles.

On considère une option de payoff  $g(S_T)$  de maturité  $T$ , où  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et on cherche à calculer son coût de surréplication défini comme le plus petit capital initial qui permet de surcouvrir son payoff avec des stratégies de portefeuille sans vente à découvert. Mathématiquement, ce coût de surréplication est défini par :

$$u_0 = \inf\{\vartheta \geq 0 : \exists \theta \in \Theta_+, V_T^{\vartheta, \theta} \geq g(S_T) \text{ p.s.}\}.$$

$u_0$  admet une formule de représentation duale que nous décrivons à présent. On introduit l'ensemble  $\mathcal{A}$  des processus  $\alpha = (\alpha_t)_t$   $\mathbb{F}$ -adaptés à valeurs dans  $A = \mathbb{R}_-$ , et pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , on note  $X_s^{t,x}$  la diffusion partant de  $x$  en  $t$  et contrôlée par  $\alpha$  selon :

$$dX_s = \alpha_s X_s ds + \sigma X_s dW_s.$$

On admettra que  $u_0 = v(0, S_0)$  où  $v$  est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique singulier :

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E[g(X_T^{t,x})], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

1) Déterminer l'Hamiltonien  $H(x, p, M)$ , associé au problème (4) et son domaine :  $\text{dom}(H) = \{(x, p, M) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : H(x, p, M) < +\infty\}$ .

2) a) Ecrire l'inéquation variationnelle de HJB que doit satisfaire (au sens des viscosités) la fonction valeur  $v$ .

b) Quelle est la condition terminale associée à (4)? i.e.

$$\hat{g}(x) := \lim_{t \nearrow T} v(t, x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

3) On considère la fonction

$$w(t, x) = E^{Q_0}[\hat{g}(S_T^{t,x})], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+,$$

où  $S^{t,x}$  est la solution partant de  $x$  en  $t$  du processus de prix sous la probabilité risque-neutre  $Q_0$  :

$$dS_s = \sigma S_s dW_s^0,$$

avec  $W^0$  un  $Q_0$ -mouvement Brownien. On admettra que  $w$  est  $C^{1,2}$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$ .

a) Quelle est l'interprétation financière de la fonction  $w$  et plus précisément de  $w(0, S_0)$ ?

b) Quelle est l'équation aux dérivées partielles linéaire satisfaite par  $w$  ainsi que sa condition terminale  $\lim_{t \nearrow T} w(t, \cdot) = w(T, \cdot)$  (par continuité de  $w$  en  $T$ )?

c) Justifier que  $w$  est croissante en  $x$ .

d) En déduire que  $w$  satisfait (au sens classique) la même inéquation variationnelle HJB que  $v$ , puis que  $v = w$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$  et donc  $u_0 = w(0, S_0)$ .

e) En appliquant la formule d'Itô à  $w(t, S_t)$  sous  $Q_0$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  déterminer la stratégie de surcouverture de  $g(S_T)$ , i.e. expliciter en fonction de  $w$  le portefeuille  $\hat{\theta} \in \Theta_+$  tel que  $V_T^{u_0, \hat{\theta}} \geq g(S_T)$  p.s.