

Examen du 9 mars 2004 : durée 3 heures
(Notes de cours autorisées)

Exercice 1 : Gestion de portefeuille par critère moyenne-variance

On considère le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad (1)$$

$$dS_t = S_t (bdt + \sigma dW_t), \quad (2)$$

où b, r, σ sont des constantes positives, W est un mouvement brownien réel standard sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ et $T > 0$ un horizon fini.

On note par \mathcal{A} l'ensemble des processus $\alpha = (\alpha_t)_t$ \mathbb{F} -adaptés à valeurs dans $A = \mathbb{R}$ tel que :

$$E \left[\int_0^T |\alpha_t|^2 dt \right] < +\infty.$$

\mathcal{A} représente l'ensemble des stratégies de portefeuille α d'un agent qui investit un montant α_t de sa richesse dans l'actif risqué S_t à la date t . La richesse de cet agent est gouvernée par :

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - \alpha_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= (rX_t + (b-r)\alpha_t) dt + \alpha_t \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note par $\{(X_s^{t,x} : t \leq s \leq T)\}$ la solution de (3) partant de x en $s = t$. Etant donné un poids $\lambda > 0$, l'objectif de l'agent est de résoudre le problème de couverture moyenne-variance :

$$v(t, x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} E \left[\left(X_T^{t,x} \right)^2 - \lambda X_T^{t,x} \right], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (4)$$

1) a) Calculer explicitement la solution $\{(X_s^{t,x} : t \leq s \leq T)\}$ pour $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathcal{A}$.

b) En déduire que

$$E \left[\sup_{s \in [t, T]} |X_s^{t,x}|^2 \right] < +\infty.$$

2) Ecrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associée au problème de contrôle stochastique régulier (4).

3) Soit $w \in C^{1,2}([0, T[, \mathbb{R}) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R})$ solution de (HJB), telle que $w(T, x) \leq x^2 - \lambda x$ et satisfaisant la condition de croissance quadratique : il existe une constante C (dépendant de T) telle que

$$|w(t, x)| \leq C(1 + |x|^2), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$w(t, x) \leq v(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

4) On cherche une solution de (HJB) avec la condition terminale $w(T, x) = x^2 - \lambda x$, de la forme

$$w(t, x) = \gamma(t)x^2 + \varphi(t)x + \rho(t) \quad (5)$$

où γ , ϕ et ρ sont des fonctions $C^1([0, T])$ à déterminer. Calculer explicitement ces fonctions γ , ϕ et ρ .

5) Montrer que la fonction w donnée par (5) est égal à la fonction valeur v de (4). Quel est un contrôle optimal?

Exercice 2

On considère la diffusion bidimensionnelle contrôlée :

$$dX_s = Y_s dW_s \quad (6)$$

$$dY_s = \alpha_s ds + dB_s, \quad (7)$$

où (W, B) est un 2-mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$, (α_t) est un processus \mathbb{F} -adapté à valeurs dans \mathbb{R} tel que $E \left[\int_0^T |\alpha_t|^2 dt \right] < +\infty$. On note par \mathcal{A} l'ensemble de ces processus de contrôles. Etant donné $\alpha \in \mathcal{A}$, $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on note $\{X_s^{t,x,y}, Y_s^{t,x,y} : t \leq s \leq T\}$ la solution de (6)-(7) partant de (x, y) en $s = t$. On considère le problème de contrôle stochastique :

$$v(t, x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E \left[g \left(X_T^{t,x,y} \right) \right], \quad (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (8)$$

où g est une fonction continue positive à croissance linéaire. On note par g^{conc} son enveloppe concave, i.e. la plus petite fonction concave majorant g qu'on supposera régulière C^2 .

1) Calculer l'Hamiltonien associé au problème de contrôle (8).

2) Ecrire l'inéquation variationnelle de Bellman que doit satisfaire la fonction valeur v .

Dans la suite, on supposera pour simplifier que v est régulière $C^{1,2}([0, T[, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (ce qui sera vraie à posteriori).

3) Montrer que v ne dépend pas de y : on écrira désormais $v(t, x)$.

4) Montrer que v satisfait :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x, y) \in [0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- 5) En déduire que
 - a) $v(., x)$ est décroissante sur $[0, T[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - b) $v(t, .)$ est concave sur \mathbb{R} pour tout $t \in [0, T[$.
- 6) Vérifier que $\liminf_{t \rightarrow T} v(t, x) \geq g(x)$.
- 7) En déduire que $v(t, x) \geq g^{conc}(x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}$.
- 8) Montrer directement à partir de (8) que $v(t, x) \leq g^{conc}(x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.
- 9) Conclure.