DEA Probabilités et Applications, Paris 6
Année 2001/2002

Contrôle Optimal Stochastique
et Applications en Finance
(Huyên Pham)

Examen du 18 mars 2002 : durée 3 heures
(Notes de cours autorisées)

Problème : Valorisation de ressources naturelles

On considère une firme qui produit une ressource naturelle dont la dynamique de prix évolue selon :

$$dX_t \quad = \quad bX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x \in I\!R_+^*,$$

où $b \in I\!R$ et $\sigma > 0$ sont des constantes réelles, W est un mouvement brownien standard unidimensionnel sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $I\!F = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. On note par $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[0, +\infty]$ et par $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus $\alpha = (\alpha_t)_{t\geq 0}$ $I\!F$-adaptés, à valeurs dans U un sous ensemble compact de $I\!R$.

On note par $\mathcal{D}^1(I\!R_+^*)$ l'ensemble des fonctions w de classe C^1 sur $I\!R_+^*$ et telles qu'il existe des constantes $k, l \in I\!R$, $C \in I\!R_+$ satisfaisant :

$$|w'(x)| \quad \leq \quad C(x^k + x^l), \quad \forall\, x \in I\!R_+^*.$$

On note aussi par $\mathcal{W}^2(I\!R_+^*)$ l'ensemble des fonctions w de classe C^1 sur $I\!R_+^*$ et de classe C^2 par morceaux sur $I\!R_+^*$. On admettra que la formule d'Itô s'applique à $w(X_t)$ pour $w \in \mathcal{W}^2(I\!R_+^*)$.

Question préliminaire

0.1) Calculer pour tout $\lambda \in I\!R$ et $T \in [0, +\infty[$, EX_T^λ.

0.2) Soit $w \in \mathcal{D}^1(I\!R_+^*)$ et $r > 0$. Montrer que pour tout $T \in [0, +\infty[$, le processus

$$M_t = \int_0^t e^{-rs}\sigma X_s w'(X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est une martingale de carré intégrable.

Une stratégie de la firme est un couple $(\alpha, \tau) \in \mathcal{A} \times \mathcal{T}$ où α correspond à un taux de production de la ressource naturelle et τ à l'instant de cessation de production de la firme. A toute stratégie (α, τ), on associe l'espérance de gain de la firme par :

$$J(\alpha, \tau) \quad = \quad E\left[\int_0^\tau e^{-rt}\bar{h}(X_t, \alpha_t)dt + e^{-r\tau}K\right],$$

où $r > 0$ est un facteur d'actualisation, $\bar{h} : I\!R_+^* \times U \to I\!R$ est le gain courant, et $-K$ est le coût resultant de la cessation des activités de production. L'objectif de la firme est de maximiser cette espérance de gain. On définit alors la fonction valeur :

$$v(x) \quad = \quad \sup_{(\alpha,\tau)\in\mathcal{A}\times\mathcal{T}} J(\alpha, \tau), \tag{1}$$

qui s'interprète comme la valeur réelle du bien de production X. L'objectif de ce problème est de calculer $v(x)$.

On fait les hypothèses suivantes sur la fonction $\bar{h}$:

(A1) Il existe une fonction mesurable $a^* : I\!R_+^* \to U$ telle que

$$h(x) \quad := \quad \sup_{a \in U} \bar{h}(x,a) \;=\; h(x, a^*(x)), \quad \forall x \in I\!R_+^*.$$

(A2) h est une fonction croissante sur $I\!R_+^*$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

(A3) $E\left[\int_0^{+\infty} e^{-rt} |h(X_t)| dt\right] < +\infty$.

1) Montrer que :

$$v(x) \quad = \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E\left[\int_0^{\tau} e^{-rt} h(X_t) dt + e^{-r\tau} K\right]. \tag{2}$$

Dans la suite, on admettra que $v \in \mathcal{W}^2(I\!R_+^*)$. On considère l'inéquation variationnelle associée au problème (2) :

$$\min\left(-\frac{\sigma^2}{2} x^2 w'' - bxw' + rw - h, w - K\right) \quad = \quad 0. \tag{3}$$

2) Soit $w \in \mathcal{W}^2(I\!R_+^*) \cap \mathcal{D}^1(I\!R_+^*)$, solution de (3).

a) Montrer que $v(x) \le w(x)$.

b) Montrer que si

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-rt} E\left[1_{\tau^* > t} w(X_t)\right] \quad = \quad 0,$$

où $\tau^* = \inf\{t \ge 0 \; : w(X_t) = K\}$, alors $w(x) = v(x)$ et la stratégie optimale est donnée par $\alpha^* = (a^*(X_t))_{t \ge 0}$ et τ^*.

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 w'' + bxw' - rw \quad = \quad -h. \tag{4}$$

3) Montrer que la solution générale de (4) sans second membre h est de la forme :

$$w_g(x) \quad = \quad Ax^m + Bx^n,$$

où $m < 0 < n$ sont à calculer.

4) On admet que sous l'hypothèse **(A3)**, les fonctions $s \mapsto s^{-m-1} h(s) \in L^1(]0, x[)$ et $s \mapsto s^{-n-1} h(s) \in L^1(]x, +\infty[)$, $\forall\, x \in I\!R_+^*$. On définit alors la fonction :

$$w_p(x) \quad = \quad \frac{2}{\sigma^2 (n-m)} \left(x^m \int_0^x s^{-m-1} h(s) ds + x^n \int_x^{+\infty} s^{-n-1} h(s) ds\right).$$

a) Vérifier que w_p est de classe C^2 sur $I\!R_+^*$ et que c'est une solution particulière de (4).

b) Montrer qu'il existe une constante réelle positive C telle que :

$$|w_p'(x)| \leq C(x^{m-1} + x^{n-1}), \quad \forall\, x \in I\!R_+^*.$$

c) Montrer que :

$$w_p(x) = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-rt} h(X_t) dt\right] \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-rt} E\,|w_p(X_t)| = 0.$$

(Indication : on supposera d'abord h bornée et on appliquera la formule d'Itô à $e^{-rt} w_p(X_t)$).

5) On suppose dans cette question que $\inf_{x \in I\!R_+^*} h(x) \geq rK$.

a) Montrer que $\inf_{x \in I\!R_+^*} w_p(x) \geq K$

b) En utilisant la question 2), montrer que $v(x) = w_p(x)$. Quelle est la stratégie optimale de la firme?

6) On suppose dans cette question que $\inf_{x \in I\!R_+^*} h(x) < rK$. On cherche une solution de (3) de la forme :

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{ll} K, & 0 < x \leq y, \\ Ax^m + w_p(x), & x > y. \end{array} \right\}$$

avec $y > 0$ et $A \in I\!R$ à déterminer.

a) Montrer que la condition sur $y > 0$ et $A \in I\!R$ pour que w soit de classe C^1 sur $I\!R_+^*$ est équivalente à :

$$\begin{aligned} f(y) &:= \frac{2}{\sigma^2} y^n \int_y^{+\infty} s^{-n-1} \left(h(s) - rK\right) ds = 0 \\ A &= -\frac{1}{m} y^{-m+1} w_p'(y). \end{aligned}$$

b) Montrer qu'il existe $y_0 > 0$ tel que $f(y_0) = 0$.

c) Vérifier que la fonction $y \in I\!R_+^* \mapsto y^{-m+1} w_p'(y)$ est croissante. En déduire que la fonction

$$w_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} K, & 0 < x < y_0, \\ A_0 x^m + w_p(x), & x \geq y_0, \end{array} \right\}$$

où $A_0 = -\frac{1}{m} y_0^{-m+1} w_p'(y_0)$, est croissante sur $I\!R_+^*$.

d) En utilisant la question 2), montrer que $v(x) = w_0(x)$. Quelle est la stratégie optimale de la firme? (On admettra que $P[\tau^* < +\infty] = 1$ où $\tau^* = \inf\{t \geq 0, X_t \leq y_0\}$.)

7) Application : On considère $U = [0, c]$ et $\bar{h}$ de la forme :

$$\bar{h}(x, a) = (\rho x - \beta)a - \gamma,$$

où ρ, β, γ sont des constantes rélles positives. β est le coût d'extraction par unité de ressource, $1 - \rho$ est proportionnel aux royalties et γ est le coût courant. On suppose aussi $r > b$.

a) Calculer $h(x)$ et $a^*(x)$.

b) Calculer $w_p(x)$ et $f(y)$.

c) Déterminer $v(x)$ et la stratégie optimale de la firme. On distinguera trois cas.