

**Examen de Contrôle Optimal Stochastique**  
**Session Septembre 2002 : durée 2 heures**  
(Notes de cours autorisées)

**Problème : Choix de consommation avec biens périssables et durables**

On considère une économie avec deux biens de consommation, l'un périssable et l'autre durable, et deux actifs financiers, l'un sans risque et l'autre risqué. Les prix du bien durable et des actifs financiers sont évalués en unité du bien de consommation périssable. Le prix de l'actif sans risque est supposé constant égal à 1. Le prix de l'actif risqué  $S$  est gouverné par :

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

et le prix d'une unité de bien durable  $P$  est gouverné par :

$$dP_t = \mu P_t dt + \gamma P_t dB_t, \quad (1)$$

où  $b, \mu, \sigma > 0$  et  $\gamma > 0$  sont des constantes réelles,  $W$  et  $B$  sont des mouvements brownien standard unidimensionnels indépendants sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni d'une filtration  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . Le bien durable se déprécie au taux  $\delta \geq 0$ . On supposera  $\delta \leq \mu$ .

Un agent doit choisir une stratégie pour consommer les biens périssable et durable et investir dans les actifs financiers. On note par  $c_t \geq 0$  le taux de consommation,  $k_t \geq 0$  le nombre de parts dans le bien durable et  $\theta_t$  le montant investi dans l'actif risqué à la date  $t$ . La richesse de l'agent évolue alors selon :

$$\begin{aligned} dX_t &= \theta_t \frac{dS_t}{S_t} + k_t dP_t - \delta k_t P_t dt - c_t dt \\ &= [\theta_t b + k_t P_t (\mu - \delta) - c_t] dt + \theta_t \sigma dW_t + k_t P_t \gamma dB_t. \end{aligned} \quad (2)$$

L'agent a un facteur d'escompte psychologique  $\beta > 0$ .

Etant donné  $x > 0$  et  $p > 0$ , on note par  $\mathcal{A}(x, p)$  l'ensemble des stratégies  $(\theta, c, k)$  où  $\theta = (\theta_t)_t$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté,  $c = (c_t)_t$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté,  $c_t \geq 0, \forall t$ ,  $k = (k_t)_t$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté,  $k_t \geq 0, \forall t$ , et tel que pour  $(X, P)$  solution de (1)-(2) avec  $X_0 = x, P_0 = p$ , on ait :

$$X_t > 0, \quad p.s. \forall t \geq 0, \quad (3)$$

$$E \left[ \int_0^T \left| \frac{\theta_t}{X_t} \right|^2 dt \right] + E \left[ \int_0^T \left| \frac{k_t P_t}{X_t} \right|^2 dt \right] < +\infty \quad (4)$$

$$E \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} |\ln(c_t k_t)| dt \right] < +\infty \quad (5)$$

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} e^{-\beta T} E[\ln X_T] \geq 0 \quad (6)$$

On cherche à résoudre le problème de l'agent :

$$v(x, p) = \sup_{(\theta, k, c) \in \mathcal{A}(x, p)} E \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} \ln(c_t k_t) dt \right]. \quad (7)$$

1) Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(\theta, k, c) \in \mathcal{A}(x, p)$  si et seulement si  $(\lambda\theta, k, \lambda c) \in \mathcal{A}(\lambda x, \lambda p)$ .

2) En déduire que  $v(x, p) = \frac{1}{\beta} \ln p + \bar{v}(x/p)$  où  $\bar{v}(y) = v(y, 1)$ .

3) a) Ecrire le générateur infinitésimal de la diffusion  $(X, P)$  associée à la stratégie constante  $(\theta, c, k)$ .

b) Ecrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, notée (HJB), associée au problème de contrôle stochastique (7).

4) En faisant le changement de fonction  $w(x, p) = \frac{1}{\beta} \ln p + \bar{w}(x/p)$ , vérifier que l'équation aux dérivées partielles (HJB) pour  $w(x, p)$  se transforme en une équation différentielle ordinaire, notée  $(\overline{HJB})$ , pour  $\bar{w}(y)$ . (On fera les changements de contrôle  $\bar{\theta} = \theta/p$  et  $\bar{c} = c/p$ ).

5) Chercher une solution de  $(\overline{HJB})$  de la forme  $\bar{w}(y) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln y$ , avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  constantes à déterminer.

6) a) En déduire la solution  $w(x, p)$  de (HJB).

b) Vérifier que  $(\theta^*(x, p), c^*(x, p), k^*(x, p))$  atteignant l'argument max dans (HJB) a la forme suivante :  $\theta^*(x, p) = a_1 x$ ,  $c^*(x, p) = a_2 x$ ,  $k^*(x, p) = a_3 x/p$  où  $a_1, a_2, a_3$  sont des constantes réelles à déterminer.

7) Etant donné  $x > 0$  et  $p > 0$ , on note par  $(X^*, P)$  la solution de (1)-(2) avec  $X_0^* = x$ ,  $P_0 = p$ , et associée au contrôle markovien  $(\theta^*(X, P), c^*(X, P), k^*(X, P))$ .

a) Montrer que  $(\theta^*(X, P), c^*(X, P), k^*(X, P)) \in \mathcal{A}(x, p)$ .

b) Montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-\beta T} E[w(X_T^*, P_T)] = 0$  où  $w(x, p)$  est la solution de (HJB) trouvée en 6) a).

8) Montrer que  $w(x, p)$  est égale à la fonction valeur  $v(x, p)$ . Quel est la stratégie optimale associée?